「ロピタルの定理」で白紙答案撲滅

０．初めに

今回は、数学Ⅲが必要な受験生を対象に「ロピタルの定理」について解説します.

ロピタルの定理は極限を求めるのに強力な定理ですが、**「極限を求められなくてこれ以上答案を続けられない」**と言うときに使ってください.使わずに済むならその方が安全です.何故なら**ロピタルの定理を使うと減点すると言う大学の教官が存在する**からです.(何故減点するのか理由は知りません.)

「白紙答案を出すよりまし」ぐらいのつもりで使って下さい.それで数点でも積み上げて合格ラインに達してくれる受験生がいてくれるのが、本稿の目的です.

この定理は内容を正しく記述していない参考書が珍しくなく、証明も全くないか、証明の一部しかないというものがほとんどですので、今回は

１．ロピタルの定理とは何か

２．ロピタルの定理の使い方

〜標準的な解答との比較

３．ロピタルの定理の高校数学での証明

を解説します.（高校数学で証明できますよ）

１．ロピタルの定理とその使い方

ロピタルの定理とは次の定理です.

【ロピタルの定理】

関数 $f(x)$、$g(x)$は $x=a$（a は実数）の近くで定義され微分可能とする. ―― 前提１

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$、$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ ―― 前提２

であり $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が収束するならば ―― 前提３

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ―― 結論

では、この内容を順に解説しましょう.

まず前提１ですが、数Ⅲで扱う関数はこれを満たしていることが普通なので特に気にすることはありません. $x\to a$ とした極限を扱うので $x\neq a$ で考えますから、$f(x)$ や $g(x)$が $x=a$ で定義されていなくても良いですし、$x=a$ で微分可能でなくてもかまいません.

次に前提２は、「$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は不定形（分子と分母の極限を別々に考えるだけでは求められない)」ということですね. 私たちが求めるのに苦労する極限は、すべて不定形です（アタリマエだな）. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は「$\dfrac{0}{0}$ の不定形」とも言います.

その次の前提３がわざわざ下線を引きたくなるぐらい非常に重要ですが、「ロピタルの定理」を扱っている参考書の半数ほどはこの前提を書いていません.

例えば

「$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$、$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ ならば、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{」}\quad \cdots①$$

を「ロピタルの定理」と称する参考書がありますが、**この命題は誤り**です（当然、ロピタルの定理ではない）. 何故ならば、反例が存在するからです.

【①の反例】

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}、g(x)=x、a=0 \quad \cdots②$$

とすると、$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$（$\because$ $-x^2\leqq f(x)\leqq x^2$ で $x\to 0$ とすればよい）、$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ である.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$(\because\ -|x|\leqq x\sin\frac{1}{x}\leqq|x| \quad で\ x\to 0\ とすればよい)$$

となるが、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ となり、これは発散（振動）する.

したがって、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ は成立しない.

以上より、②は①の反例である. ■

誤った命題①を「定理」と呼んではいけませんね.

この事に関して面白い入試問題があります.

> 【岐阜薬科大（抜粋.下線は筆者）】
> 不等式 $x\cos x<\sin x<x$ （$0<x<\pi$）を示し、これを用いて、$f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^2}$ （$0<x<2\pi$）のとき、$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=0$ を示せ.ただし、定理「$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{h'(x)}{g'(x)}$ （$g(0)=0$、$h(0)=0$））」の使用は、その証明をしなければ不可とする

この下線部は①と同様の$\boxed{\text{前提３}}$の抜けた“誤ったロピタルの定理”ですね.出題者の意図はおそらく「もしもロピタルの定理を証明して使うような受験生がいたら、自分で$\boxed{\text{前提３}}$を付け足すかどうかで、ロピタルの定理を本当に理解しているかどうか判断しよう」と言うことでしょう.（この問題自体は、ロピタルの定理を証明するよりずっと簡単ですよ.）

さて、ロピタルの定理は、「$x\to a$」の部分を「$x\to\infty$」や「$x\to-\infty$」にしてもいいですし、$\boxed{\text{前提２}}$を

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ （or $-\infty$）、$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ （or $-\infty$）

にしてもかまいません.（$\boxed{\text{前提３}}$はそのままですよ）

つまり、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が$\pm\dfrac{\infty}{\infty}$の不定形でもよいのです.

この場合も含めて「ロピタルの定理」と言います.つまり、書き直せば次のようになります.

> 【ロピタルの定理】（$\boxed{\text{前提１}}$は省略）
>
> $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形（$\dfrac{0}{0}$ や$\pm\dfrac{\infty}{\infty}$） 前提２´
>
> であり、 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が収束するならば 前提３
>
> $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 結論
>
> （a は実数でも、∞などでもよい）

２．ロピタルの定理の使い方〜標準的な解答との比較

ロピタルの定理を使うためのポイントは、

１．$\boxed{\text{前提2}}$（または2´）と$\boxed{\text{前提3}}$をきちんと確認する

２．$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$、$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ などの極限の基本公式を示すのには用いない

という２点です.後者については、これらの基本公式から微分の公式が得られるのですから当然ですね.

$\boxed{\text{前提２}}$（または２´）は自明なら明記しなくても良いですが、$\boxed{\text{前提３}}$は明記して「私はロピタルの定理を理解しています」と採点する教官にアピールしましょう.

具体的な問題の標準的な解答と、それがわからなかった場合のロピタルの定理を用いた解答を比較してもらいましょう.

> 【問１】$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{2^x-1}\log\frac{2^x+4^x+8^x}{3}$ を求めよ.

（標準的解答）

$f(x)=\log\dfrac{2^x+4^x+8^x}{3}$、$g(x)=2^x-1$ とおくと、$f(0)=0$、$g(0)=0$ となるから、

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{2^x-1}\log\frac{2^x+4^x+8^x}{3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

…①

$f´(x)=\dfrac{2^x\log2+4^x\log4+8^x\log8}{2^x+4^x+8^x}$、$g´(x)=2^x\log2$

であるから、$f´(0)=\dfrac{\log2+\log4+\log8}{3}=2\log2$、

$g´(0)=\log2$ となり、（与式）$=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=\dfrac{2\log2}{\log2}=2$.

■

この解答は極限を微分係数に帰着する①がポイントで

す.この手法をまとめると次のようになります.

【極限を微分係数に帰着する手法】

微分可能な関数 $f(x)$、$g(x)$について、$f(a)=g(a)=0$、$g'(a)\neq 0$ であれば、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

これに気づかなければ、白紙答案を作るよりはロピタルの定理でいきましょう.

(ロピタルの定理を用いた解答)

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\frac{\log\dfrac{2^x+4^x+8^x}{3}}{2^x-1}$$

前提２

右辺の分子と分母はともに 0 に収束する.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\log\dfrac{2^x+4^x+8^x}{3}\right)'}{\left(2^x-1\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2^x\log 2+4^x\log 4+8^x\log 8}{2^x+4^x+8^x}}{2^x\log 2}$$

前提３

$=2$ (収束)

よってロピタルの定理より、(与式)＝２ ■

次の問題は、上記の微分係数を用いる手法が使えないことに注意してください.

【問 2】$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ を求めよ.

$f(x)=e^x+e^{-x}-2$、$g(x)=x^2$ とおくと、$f(0)=0$、$g(0)=0$ となりますから、左記の手法を使って

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x}}$$

としてみても、右辺の分母の極限は $g'(0)=0$ となりますから、うまくいきません.別の工夫が必要です.

(標準的解答)

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2=1 \ ■$$

気づけばたいしたことのない計算ですが、もし気づかなければ、ロピタルの定理でどうぞ.

(ロピタルの定理を用いた解答) (前提２は自明でしょう)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\quad\cdots①$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1\ (\text{収束})$$

前提３

ロピタルの定理より、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=1\quad(\text{収束})$$

前提３

①とロピタルの定理より、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=1\qquad ■$$

この解答ではロピタルを 2 回用いていますね.左記の手法が使えないような極限のときは、それ以外のうまい工夫を見つける努力をし (あるはず！)、見つからなければ応急処置としてロピタルの定理を使ってください.

３．ロピタルの定理の高校数学での証明

いよいよ、ロピタルの定理を証明します. 以下では区間 $a\leqq x\leqq b$ を［a、b］と表し、区間 $a<x<b$ を$(a$、$b)$と表すことにします.

証明に使うのは、次の単純な定理です.

【ロルの定理】

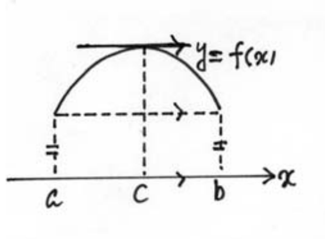
関数 $f(x)$は［a、b］で連続、$(a$、$b)$で微分可能とする.

このとき、$f(a)=f(b)$ならば、

$f'(c)=0$、$a<c<b$

となる c が存在する.

この定理の意味することは、「なだらかな山の頂上（あるいは谷底）で接線を引いたら、水平である」ということですね.



これから、「コーシーの平均値の定理」(コーシーは有名な数学者) と言う定理が示せます.

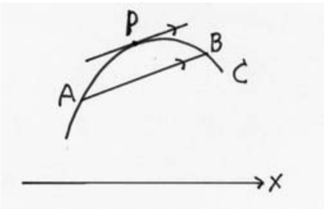
【コーシーの平均値の定理】

関数 $f(x)$、$g(x)$は［a、b］で連続、(a、b)で微分可能とする.$g(a)\neq g(b)$かつ $g'(x)\neq 0$（$a<x<b$）ならば、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}、a<c<b$$

となる c が存在する.

(**注**.数学Ⅲの「平均値の定理」は、$g(x)=x$ とした場合になっています)



この定理の図形的な意味は、XY 平面上の曲線 $C:X=g(x),Y=f(x)$ の上に 2 点A ($g(a)$、$f(a)$)、B ($g(b)$、$f(b)$) をとると、C 上のAとBの間の点P（$g(c)$、$f(c)$）を、「Pにおける C の接線（傾きが $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$）」と直線AB（傾きが $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$）が平行になるようにとれるということです.

【コーシーの平均値の定理の証明】

XY 平面上に 2 点A（$g(a)$、$f(a)$）、B（$g(b)$、$f(b)$）をとる.$m=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ とおくと、

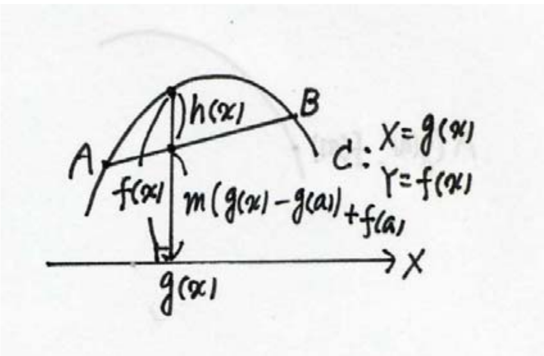
直線AB：$Y=m(X-g(a))+f(a)$

$\Leftrightarrow Y-\{m(X-g(a))+f(a)\}=0$

左辺の(X、Y)へ($g(x)$、$f(x)$)を代入し、

$h(x)=f(x)-\{m(g(x)-g(a))+f(a)\}$ …①

とおく.(図形的な意味は下図参照)



$h(a)=f(a)-\{m(g(a)-g(a))+f(a)\}=0$

$h(b)=f(b)-\{m(g(b)-g(a))+f(a)\}$

$=f(b)-\{f(b)-f(a)+f(a)\}=0$

(上の図からも $h(a)=h(b)=0$ は明らかですね)

したがって、ロルの定理より

$h'(c)=0$、$a<c<b$

となる c が存在する.

①より、

$h'(x)=f'(x)-mg'(x)$

$h'(c)=0$ より、

$f'(c)-mg'(c)=0$

$g'(c)\neq 0$（$\because g'(x)\neq 0$（$a<x<b$））より、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=m=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad ■$$

コーシーの平均値の定理を用いて、ロピタルの定理を証明しましょう.$\boxed{前提1}$と$\boxed{前提3}$は仮定し、

（Ⅰ）$\lim_{x\to a} f(x)=0$、$\lim_{x\to a} g(x)=0$（a は実数）

の場合と

（Ⅱ）$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$、$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$

の場合を示します.(前者は容易だが、後者は少し難しい)入試の極限に現れるのは、この 2 つの場合がほとんどでしょう.

いずれの場合も $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が収束（$\boxed{前提3}$）しているので $g'(x)\neq 0$ としてよく、コーシーの平均値の定理が使えます.

【(Ⅰ)の場合のロピタルの定理の証明】

$f(a)=0$、$g(a)=0$ としてよい.

$x\neq a$ のとき、コーシーの平均値の定理より、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

となる c が x と a の間に存在する.

$\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が収束しているので、その極限値を l とおく（l は実数）.

$x\to a$ のとき、$c\to a$ となり、$\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\to l$.

したがって、$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ■

【(Ⅱ)の場合のロピタルの定理の証明】

$f(n)<\sqrt{f(x)}$ かつ $g(n)<\sqrt{g(x)}$

をみたす最大の整数nを$n(x)$と表すことにする.

$x \to \infty$のとき、$\sqrt{f(x)} \to \infty$かつ$\sqrt{g(x)} \to \infty$となるから、$n(x) \to \infty$となる. (注.$n(x)$が整数であることには特に意味はない. $n(x) \to \infty$ が重要)

さらに、$n(x)$が十分大きくなれば、$f(n(x))$は正となるから、

$$0 < \frac{f(n(x))}{f(x)} < \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x)}$$

$x \to \infty$のとき、$f(x) \to \infty$より$\dfrac{\sqrt{f(x)}}{f(x)} \to 0$となるので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(n(x))}{f(x)} = 0 \qquad \cdots①$$

同様に $$\lim_{x\to\infty} \frac{g(n(x))}{g(x)} = 0 \qquad \cdots②$$

コーシーの平均値の定理より、

$$\frac{f(x)-f(n(x))}{g(x)-g(n(x))} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \cdots③$$

となるcがxと$n(x)$の間に存在する.

(**注. $n(x) \to \infty$ となることと、③が証明のポイント.**$f(n(x))$は$f(x)$に比べると十分小さく、$g(n(x))$は$g(x)$に比べると十分小さいので、③は、$\dfrac{f(x)}{g(x)} \fallingdotseq \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$を意味している.)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$が収束しているので、その極限値を$l$とおく ($l$は実数).

$x \to \infty$のとき、$n(x) \to \infty$となるので、$c \to \infty$となるから、$\dfrac{f'(c)}{g'(c)} \to l.$

これと③より、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(n(x))}{g(x)-g(n(x))} = l \qquad \cdots④$$

一方、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(n(x))}{f(x)-f(n(x))} \cdot \frac{f(x)-f(n(x))}{g(x)-g(n(x))}$$
$$= \frac{1-\dfrac{g(n(x))}{g(x)}}{1-\dfrac{f(n(x))}{f(x)}} \cdot \frac{f(x)-f(n(x))}{g(x)-g(n(x))}$$

ここで$x \to \infty$とすれば、①②④より、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad ■$$

ここまでの証明を読み通せた読者のみなさんは十分力がありますから、ロピタルの定理を使う必要はないでしょう (逆説的な結論(^^;)) .万が一のときのお守りのつもりでロピタルの定理を知っておいてくださいね.