さよなら，バームクーヘン
～大学入試でグリーンの定理を使おう～

長谷川進

2018 年 1 月 25 日

さよなら，バームクーヘン～大学入試でグリーンの定理を使おう～目次

はじめに

本書の概要

数学IIIの微積分に登場する「媒介変数表示の曲線を境界にもつ図形の面積を求める」という問題は，ハイレベルな受験生には必須のテーマですが，計算問題なのに論述が面倒という厄介なものです。

本書の目的の一つ目は次の点です。

(目的1) 理系生が大学1年で学ぶ「グリーンの定理」を使えばこの厄介な点をクリアできることを解説する。

グリーンの定理には「ガウス・グリーンの定理」と呼ばれるバージョンがあり，「この方法で計算が簡単になる」と書いてある参考書もありますが，一般には「ガウス・グリーン」を用いると計算量が2倍になってしまいます。つまり，「ガウス・グリーン」で計算量が減るのは特殊なケースですから「どういう場合にガウス・グリーンで簡単になるのか」を見分けることが重要です。それなのに，**ガウス・グリーンを紹介している本であっても，いつ使えばよいかの判断基準を説明しているものが無い**(私は見たことがありません)という大変困った状況になっています。

ですから，本書の目的の二つ目は次の点です。

(目的2) どのような場合に「ガウス・グリーンの定理」で計算量が減るのか，その判断基準を解説する。

また，グリーンの定理は y 軸まわりの回転体の体積を求めるのにも役に立ちます。

このテーマは受験業界には「バームクーヘン公式」を呼ばれる解法が広まっていますが，同時にこの“公式”の**怪しい証明**(証明と言いながら証明になっていない)も広まっているので，大学の教官の中にはバームクーヘン公式を嫌っている方が珍しくありません。東大ではバームクーヘン公式に相当する等式を「証明してから使え」という出題がされたことがありますが，正解者は少なかったと聞いています。

ですから，本書の最後の目的は次の点です。

(目的3) y 軸まわりの回転体の体積をグリーンの定理により簡単に求められることを解説する。

本書の内容を理解すれば，大学1年の解析の授業でも役立つはずです。お楽しみに。

【注意】

本書において青字に赤い下線の部分はクリックすると該当ページにジャンプできます。このジャンプ先はソフトで自動的に設定させているのですが，該当ページでない所にジャンプしてしまうバグが一部で生じています。御容赦下さい。

その場合はkindleの目次機能や，検索機能をご利用下さい。

第I部

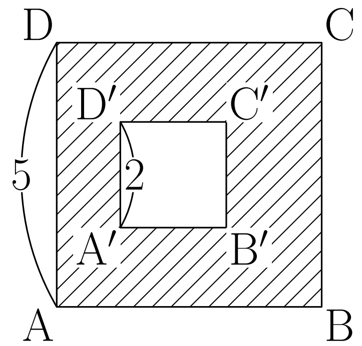
媒介変数表示の曲線と面積

§1.　正の面積，負の面積(面積の－１倍)

1.1　はじめに

パラメーター表示された曲線で囲まれた図形の面積を求める，という問題がある．それを解くにはなかなかやっかいな計算が必要になる．この教材では，その計算をやりやすくする方法を解説する．そのために重要なアイデアが「正の面積，負の面積(面積の－1倍)」だ．

1.2　正の面積、負の面積 (面積の－１倍) の導入



右図においては，一辺の長さが5の正方形ABCDの内部に，一辺の長さが2の正方形A′B′C′D′が含まれているとしよう．

斜線部の面積は

$$(\text{正方形ABCD}) - (\text{正方形A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}) = 25 - 4 = 21$$

だな．(アタリマエ)

この式を

$$25 + (-4) = 21 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と書き直せば，-4 は正方形 $\mathrm{A'B'C'D'}$ の**面積の -1 倍**である．このように，「**図形の面積の -1 倍を表している式や数値**」のことを**負の面積**と呼ぶことにする．

また，図形の面積を表す式や数値は，「図形の面積」だということを強調するために，**正の面積**と呼ぶことにする．

注意

この教材を解説すると，「面積がマイナスにあることがあるんですか？」と聞いてくる子がいるので困る．よーーーーーーく読んでくれよ．**「面積の -1 倍」を「負の面積」と言っているだけだよ．** ①の「-4」が，正方形 $\mathrm{A'B'C'D'}$ の面積の -1 倍であることを「-4 は負の面積」と呼ぶだけだ．正方形 $\mathrm{A'B'C'D'}$ の面積はあくまでも 4 だ．

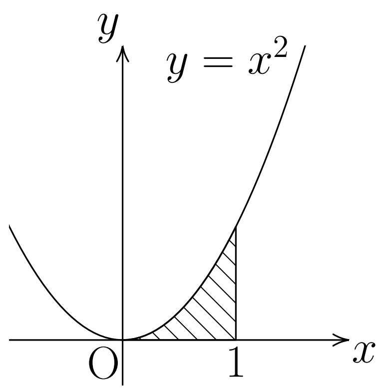
1.3　定積分への適用

正の面積，負の面積を定積分に当てはめてみよう．

(**例**)

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

は、右図の斜線部の面積 S を表す．



よって，$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ は「正の面積」だ．

積分区間の上下を入れ替えてみよう．

$$\int_1^0 x^2\,dx \quad \left(= -\int_0^1 x^2\,dx\right)$$

これは、$-S$ を表している．したがって，$\displaystyle\int_1^0 x^2\,dx$ は「負の面積」だ.

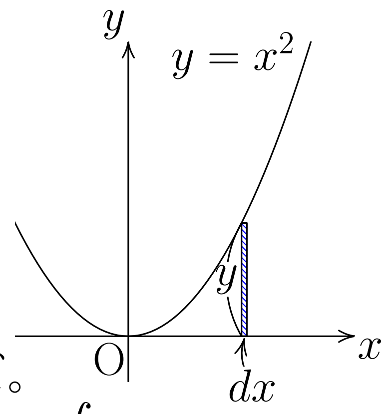
1.3.1　正の面積・負の面積の判定

上の例で，定積分が正の面積を表すのか，負の面積を表すのかを考えた．このことをもう少し詳しく考察しよう．

$\displaystyle\int_a^b y\,dx$ という記号はライプニッツが作ったのだが，彼は元々は

$$\mathrm{omn.}\, y\, \mathrm{ad}\, x$$

と書いていた。omn はラテン語で「すべて」の意味。また，dx ではなくて，ad x だ。



(工作社『ライプニッツ著作集第 2 巻』より。$\displaystyle\int$ を使い始めたのは 1675 年 10 月 26 日だと言うこともこの本で分かる。)

現代の記号で書けば

$$\sum y\,dx$$

であり，

> 縦が y で横が dx という長方形 (上図の斜線部みたいなもの) の面積 $y\,dx$ をすべて足せ ($\sum$)

と言うことだ．(ただし，**y も dx も正負を区別する．**)

これを $\displaystyle\int_a^b y\,dx$ という記号にしたのだが，その意図は次のようになる。

1. 「和」を表すラテン語summa (英語だとsum) の頭文字 s を使った。s は当時 $\int$ と書かれていた！
2. dx は「x の微小変化 ($\fallingdotseq 0$)」と言うこと．つまり，

    (i) x が増加する区間では $dx > 0$,　(ii) x が減少する区間では $dx < 0$

    となる．
3. y の符号と dx の符号から，$y\,dx$ の符号を決める．
    (i) y と dx が同符号なら，$y\,dx > 0$ となり，**$\boldsymbol{y\,dx}$ は正の面積**を表す．
    (ii) y と dx が異符号なら，$y\,dx < 0$ となり，**$\boldsymbol{y\,dx}$ は負の面積**を表す．

以上のことを用いて，先ほどの例を解釈しよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ について．

- $x^2 \geqq 0$
- x は 0 から 1 まで動くので，増加であるから $dx > 0$

となり，$x^2\,dx \geqq 0$ である．よって，$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ は正の面積を表す．

(b) $\displaystyle\int_1^0 x^2\,dx$ について.

- $x^2 \geqq 0$
- x は 1 から 0 まで動くので，減少であるから $dx < 0$

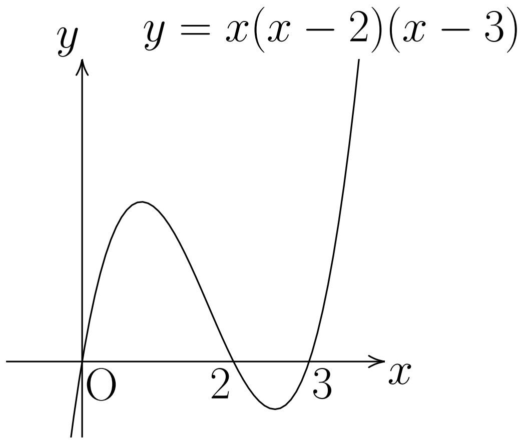
となり，$x^2\,dx \leqq 0$ である．よって，$\displaystyle\int_1^0 x^2\,dx$ は負の面積を表す.

問 1.　右のグラフを参考にして，

(c) $\displaystyle\int_2^3 x(x-2)(x-3)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_3^2 x(x-2)(x-3)\,dx$

が正の面積であるか，負の面積であるかを，前ページの考え方により判定せよ.



【解答】

(c) について。$x(x-2)(x-3) \leqq 0$，$dx > 0$ ($\because$ x が 2 から 3 まで増加) より，$x(x-2)(x-3)dx$ が負の面積を表すので，**(c) は負の面積**。

(d) について。$x(x-2)(x-3) \leqq 0$，$dx < 0$ ($\because$ x が 3 から 2 まで減少) より，$x(x-2)(x-3)dx$ が正の面積を表すので，**(d) は正の面積.**

実際，(d) は $\displaystyle -\int_2^3 x(x-2)(x-3)\,dx$ と変形できるから，この 3 次関数のグラフと x 軸とで囲まれている部分のうち x 軸より下の部分の面積を表している。

1.4　正の面積・負の面積で面積計算を解釈する

1.4.1　典型問題で面積計算

パラメーター表示された曲線で囲まれた図形の面積を求める典型問題の**普通の解答**をまず確認しよう。

次の節で，そこへ**「正の面積・負の面積 (面積の -1 倍)」が反映している様子**を見るためだ。

問題

曲線 $C: x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta+\cos\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)$ について

(1) C 上の点で x 座標が最大となる点 P と，y 座標が最大となる点 Q の座標をそれぞれ求めよ．

(2) x と y の増減を調べ，C の概形をかけ．(簡単な三角関数だから，微分しなくてもよいよ．)

(3) C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(解答は次ページ)

【解答】

(1)

$$C : x = \cos\theta, \quad y = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

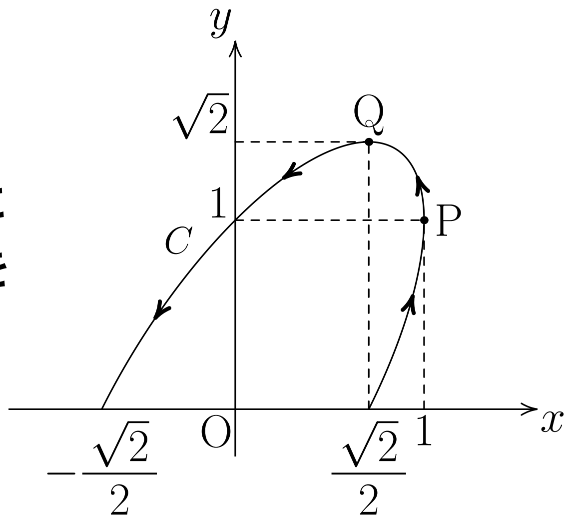
となるから，x は $\theta = 0$ のとき最大であり，そのとき $\underline{\mathrm{P}(1,\ 1)}$

y は $\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大であり，そのとき $\underline{\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)}$

(2) x，y の増減は次のようになる．

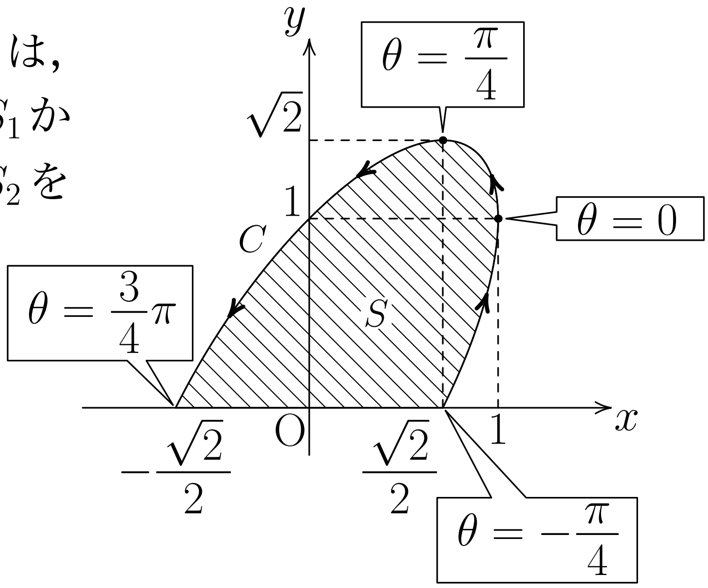
θ	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$
x	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

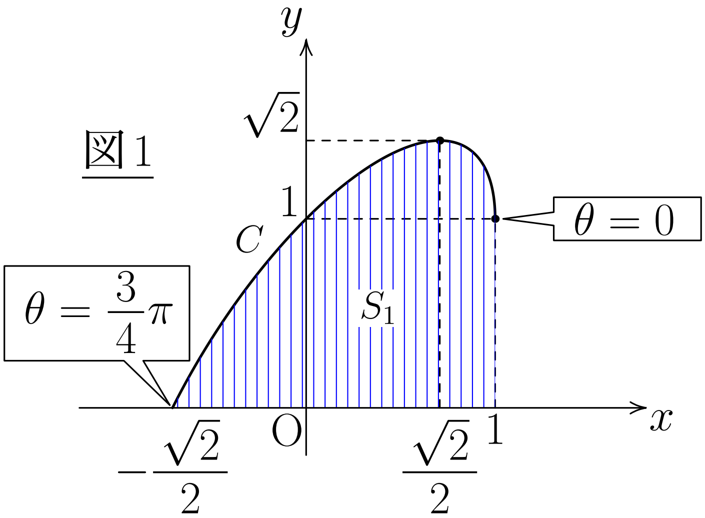
以上より，C の概形は右図の通り．



(**注**)　以下，このプリントでは，**媒介変数を増加させるにつれて点 (x, y) が動く向きを $\wedge$ という矢印で表す**ことにする．

(3)　右図の斜線部の面積 S は，下の図1の斜線部の面積 S_1 から，図2の斜線部の面積 S_2 を除いたものである．





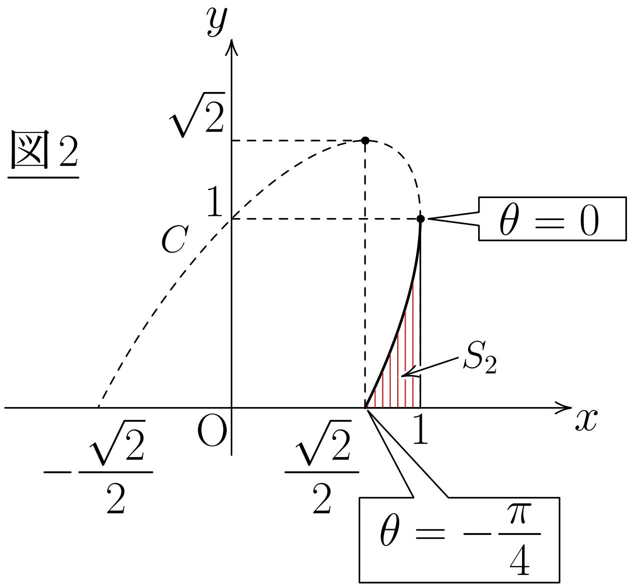


図1の斜線部の面積 S_1 は，

$$S_1=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} y\,dx$$

と表せる．ただし，点 (x,y) は C の $0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$ の部分の点である．

$C: x=\cos\theta,\ y=\sin\theta+\cos\theta$ を用いて置換積分すれば

$$S_1=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \qquad \cdots①$$

図 2 の斜線部の面積 S_2 は

$$S_2=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} y\,dx$$

と表せる．ただし，点 (x,y) は C の $-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq 0$ の部分の点である．

$C: x=\cos\theta,\ y=\sin\theta+\cos\theta$ を用いて置換積分すれば

$$S_2=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \qquad \cdots②$$

以上より，C と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned}S=&S_1-S_2\\ =&\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \quad (\because\ ①,②)\\ =&\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta+\int_{0}^{-\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\ =&\int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

このテキストの前半の目標

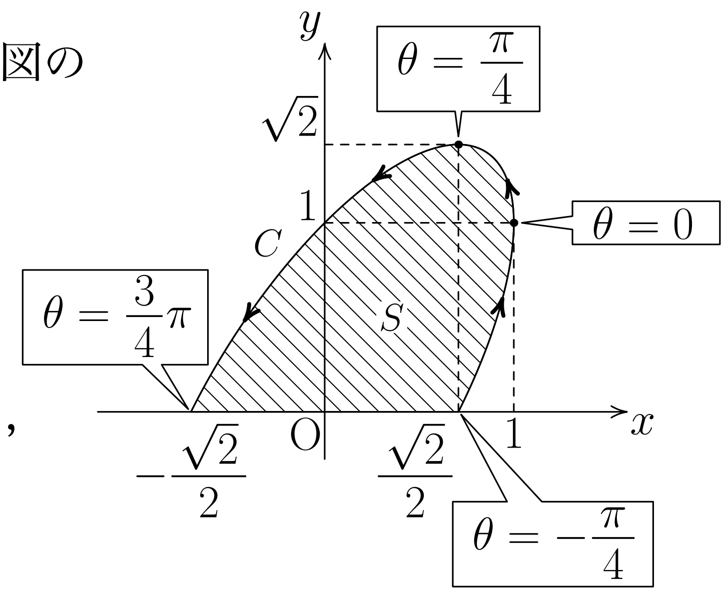
$$S=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

とすぐに書けるようになってもらうことだよ。

したがって

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} (\sin\theta + \cos\theta)(-\sin\theta)\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin\theta + \cos\theta)\sin\theta\,d\theta \\
&\qquad \text{(積分区間の上下を入れ替えた)} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta)\,d\theta \qquad \cdots③ \\
&\text{(三角関数の積分は，次数を下げると簡単)} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= \underline{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

1.4.2　正の面積・負の面積によって (3) の解答を理解しよう



以上で分かったように，右図の斜線部の面積 S は，

$$S = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

となった。

これは次のように考えると，面倒な論述を書かなくてもすぐに書ける。

曲線 $C : x = \cos\theta,\quad y = \sin\theta + \cos\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)$
について

$$S = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

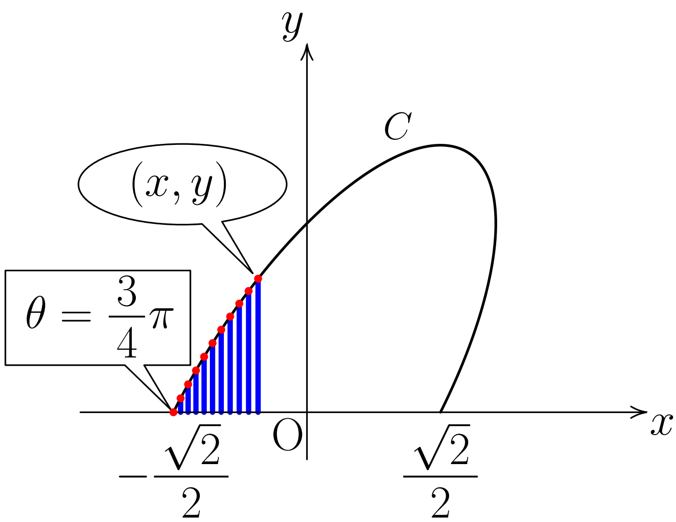
- 最後が $d\theta$ なので，θ が積分区間の下端から上端まで動き，それにしたがって点 $(x,\ y)$ が C 上を動く．
- 点 $(x,\ y)$ の動きに従って，

  $y\dfrac{dx}{d\theta}\,d\theta = y\,dx =$ (縦が y で横が dx の長方形の面積)

  を足していく ($\int$ は Σ が変形したものだ)．ただし，面積 $y\,dx$ は，**正の面積と負の面積を区別**すること！

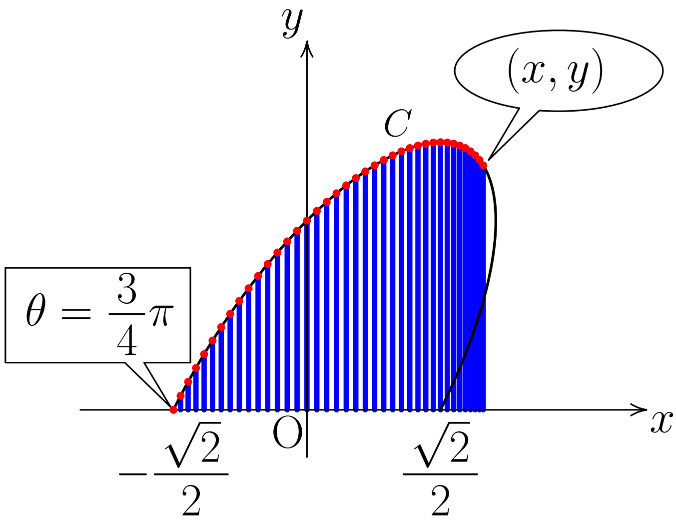
この積分の式の意味は以下のようになる。

(step1) 積分区間の下端 $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ に対する点 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ をスタートし，C 上の点 (x, y) は右に向かって動き始める。(図の赤丸●)
それに従い，縦が y で横が dx ($\fallingdotseq 0$) の**細長い長方形** (図では青い線で表している) の面積 $y\,dx$ を足していく。



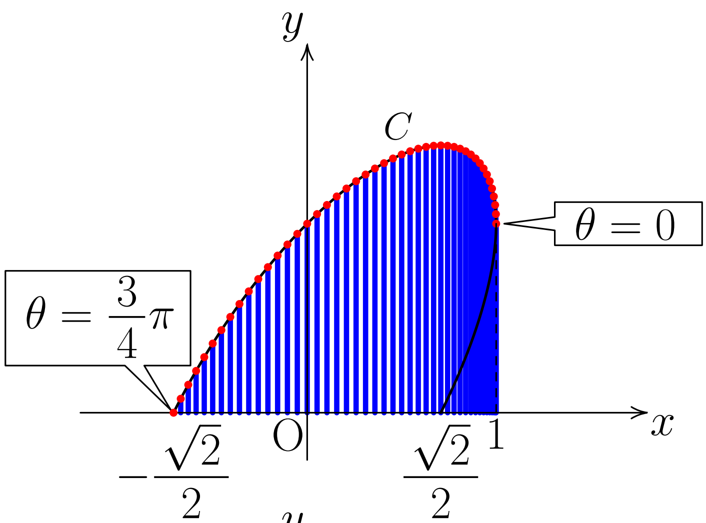
ただし，$y \geqq 0$ かつ $dx > 0$ であるから，$y\,dx$ は正の面積(つまり，面積そのもの)である。

(step2) 点 (x, y) がかなり右まで行った。C の下側の余計な部分の面積も足していることに注意せよ。

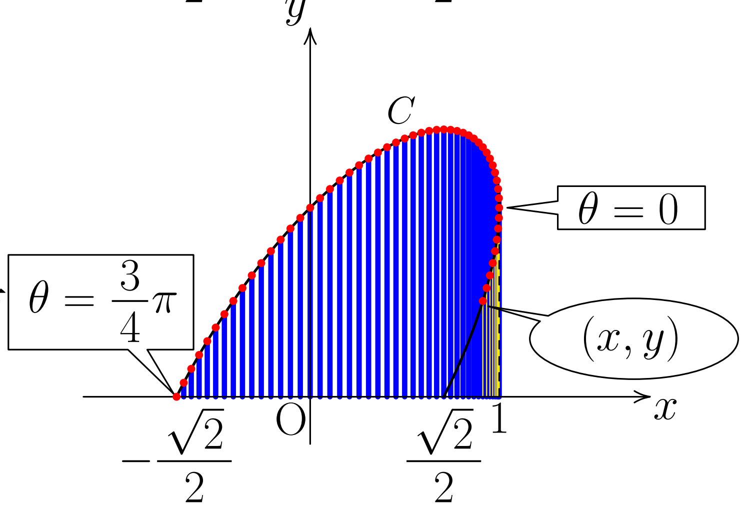


(step3) $\theta = 0$ となり，点 (x, y) は C の x 座標が最大の点に達した。C の下側の余分な部分の面積まで足していることが明らかであろう。

ここから，点 (x, y) は左下に向かって動き始める。



(step4) 点 (x, y) が, $\theta = 0$ に対する点より左下に向かって動くと $\boldsymbol{dx < 0}$ **である**から (y は正のまま), $\boldsymbol{y\,dx}$ **は負の面積**となる。細長い長方形の面積の -1 倍と言うことだ。図では黄色い線で

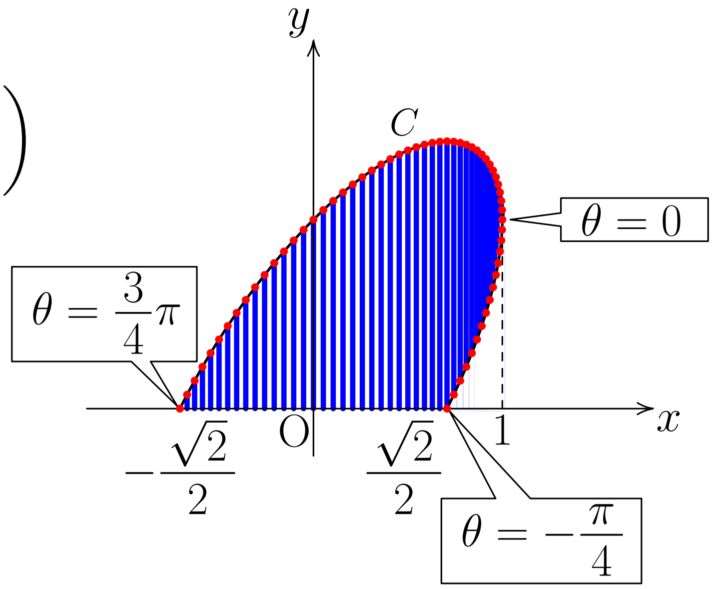


表している。

面積を足しすぎていた部分を，負の面積を足すことにより打ち消していることが分かるだろう。

(step5) θ が積分区間の上端 $-\dfrac{\pi}{4}$ に達し，点 (x, y) は点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ に至りゴールだ。

θ が 0 から $-\dfrac{\pi}{4}$ までは点 (x, y) が左下に向かって動いていて，$y \geqq 0$ かつ $dx < 0$ より $y\,dx$ は負の面積であった。



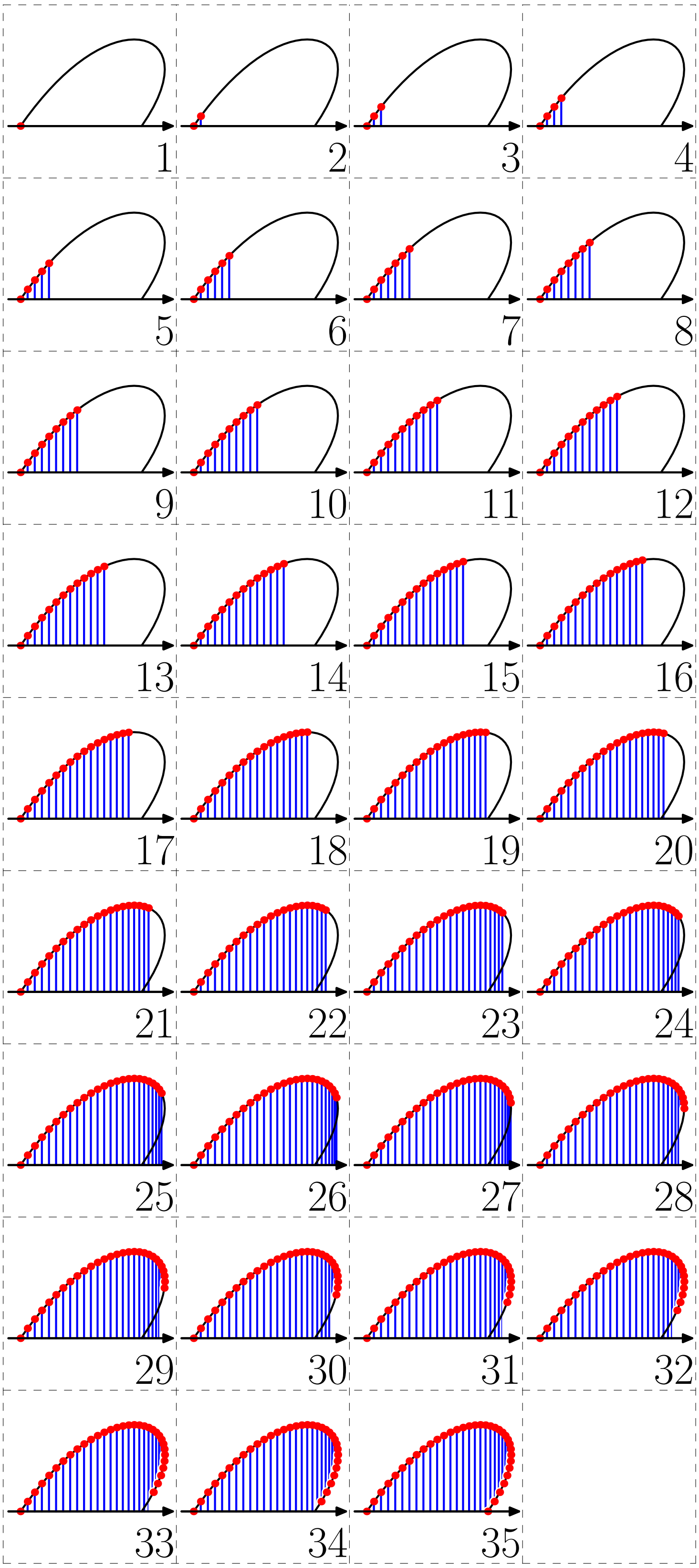
これを足したことで C の下側の余分に足した部分の面積はちょうど打ち消され，C と x 軸とで囲まれた部分の面積 S が

$$S = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} y \frac{dx}{d\theta}\, d\theta \qquad \cdots (\bigstar)$$

と表されることが分かった。 ■

以上のように $(\bigstar)$ の意味を理解することは次ページのパラパラ漫画でも確認できる。

1.4.3　前ページの（★）の意味をパラパラ漫画で理解しよう



パラパラ漫画実況中継

図 1 番からスタート。積分区間の下端 $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ において，点 (x, y) は図の ● にある。ここから右上に向かって動き始める。

$y\dfrac{dx}{d\theta}d\theta = y\,dx$ は細長い長方形の「正の面積」。図では**青い線**で表している。それを $\displaystyle\int$ で足す。

$y\,dx$ は、まだまだ正の面積。

$y\,dx$ は、まだまだ正の面積。

20 番から、C の下側の**余計な部分の面積**まで加え始める。

余計な部分の面積までかなり加えている。

26 番までがぎりぎりで、「$y\,dx$ が正の面積」かな。
27 番から点「●」が左下に向かって動き始め、$y\,dx$ は細長い長方形の「**負の面積**」になり、余計な面積を打ち消し始める。

35 番で θ が積分区間の上端 $-\dfrac{\pi}{4}$ になり，点「●」が x 軸上に達し、C と x 軸で囲まれた部分の面積だけがちょうど残った。＼(＾ｏ＾)／

1.4.4　まとめ〜媒介変数表示の曲線と定積分，積分区間の定め方

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)$

と表された曲線 C があり，変数 t の範囲は $\alpha \leqq t \leqq \beta$ または $\beta \leqq t \leqq \alpha$ とする。

C を境界とする領域の面積を求めるには次のような定積分を求める。ただし，**積分区間の上端下端の決め方は下の方に書いてある。**

$$\int_{\square}^{\square} y\frac{dx}{dt}\,dt \quad (\square \text{は一方が}\alpha\text{，他方が}\beta)$$

- 最後が dt なので，t が積分区間の下端から上端まで動き，それにしたがって点 $(x,\ y)$ が C 上を動く．
- 点 $(x,\ y)$ の動きに従って，$y\dfrac{dx}{dt}\,dt = y\,dx =$ (縦が y で横が dx の長方形の面積) を足していく ($\displaystyle\int$ は Σ が変形したものだ)．ただし，ここでの面積は，**正の面積と負の面積を区別**すること！
- つまり，y の正負，dx の正負 (x が増加しているときは $dx > 0$，x が減少しているときは $dx < 0$) を考えて，$y\dfrac{dx}{dt}\,dt = y\,dx$ が正の面積なのか，負の面積なのかを判断せよ．
- 積分区間の上端下端は「$\boldsymbol{y}$**が最大の付近で**$\boldsymbol{dx > 0 \Longleftrightarrow x}$**が増加**」となるようにせよ．ただし，この定積分がどのような図形の面積を表しているかを，**正の面積・負の面積から考えよ。**必要に応じて，調整すること。**詳しくは次ページを参照**せよ．

1.4.5　積分区間の定め方の確認〜例 1

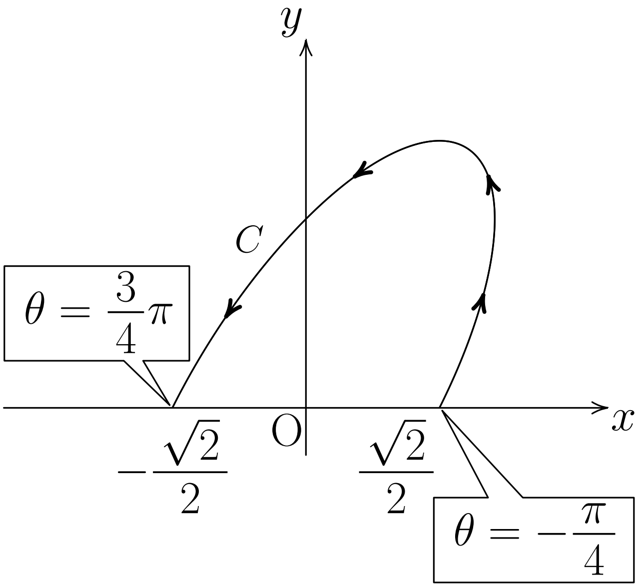
積分区間の上端と下端の定め方を p.12 の問題で確認しよう。

問題(再掲)

曲線 $C : x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta + \cos\theta \ \left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi\right)$
について

(1) (2) は(略)

(3) C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.



C の概形は右図のようであった。
θ が $-\frac{\pi}{4}$ から大きくなり $\frac{3}{4}\pi$ になるまでに，C 上の点 (x, y) は図の**矢印**の向きに進んでいく。
このとき，C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めるために，まず

$$\int_{\square}^{\square} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

と言う積分を考える。
$\square$ には $-\frac{\pi}{4}$ と $\frac{3}{4}\pi$ のいずれかが入るが，それを判断するには次のようにする。

(step1)

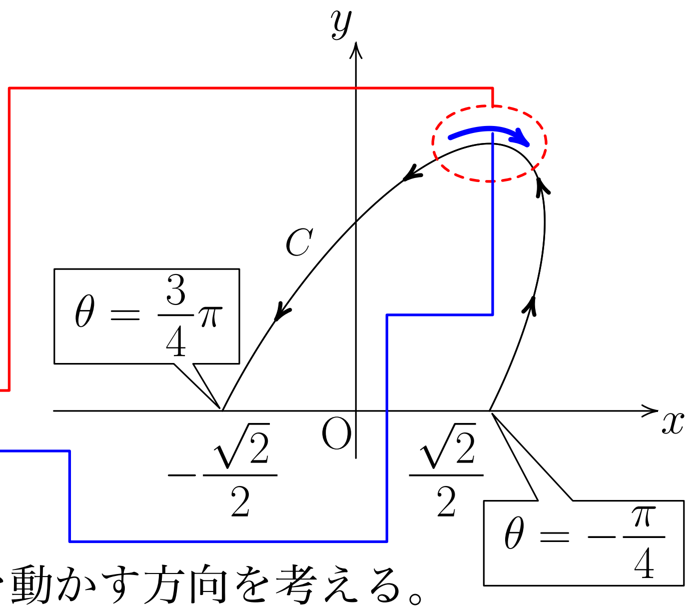
　この積分は

$$y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = y\,dx$$

を足し合わせる形であるから，

　　y が最大の付近で

　　$dx > 0 \iff x$ が増加



となるように，C 上の点 (x, y) を動かす方向を考える。

(step2)

　この C では θ を $\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$ **から** $\boldsymbol{-\frac{\pi}{4}}$ **に向かって動かす**ことになり，

- 積分区間の下端が $\frac{3}{4}\pi$
- 上端が $-\frac{\pi}{4}$

となる。つまり，定積分は

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

とする。

(step3)

　この定積分がどのような図形の面積を表しているかを，p.20 のパラパラ漫画のように考える。

　すると，この定積分そのものが求める面積 S を表していると分かる。

(step4)
後は,

$$C : x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta + \cos\theta$$

を用いて積分を計算する。 ■

1.4.6　積分区間の定め方の確認〜例 2(芝浦工大)

問 2.　(芝浦工大)
原点をOとする xy 平面上に

$$\text{曲線} C : x = 5\cos\theta + \cos 5\theta, \quad y = 5\sin\theta + \sin 5\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

がある.

(1)　C の概形を描け.

(2)　C の両端とOを結んでできる2本の線分, および C によって囲まれる図形の面積を求めよ.

【解答】

(1)

$$x = 5\cos\theta + \cos 5\theta,\ y = 5\sin\theta + \sin 5\theta$$

とおく.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -5(\sin\theta + \sin 5\theta)\\ &= -10\sin 3\theta\cos 2\theta\\ &\leqq 0 \quad \left(\because\ 0 \leqq 2\theta \leqq 3\theta \leqq \frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

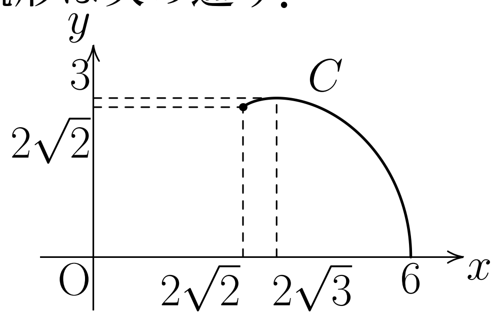
【和→積】
$\sin A + \sin B$
$= 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= 5(\cos\theta + \cos 5\theta)\\ &= 10\cos 3\theta\cos 2\theta\end{aligned}$$

【和→積】
$\cos A + \cos B$
$= 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

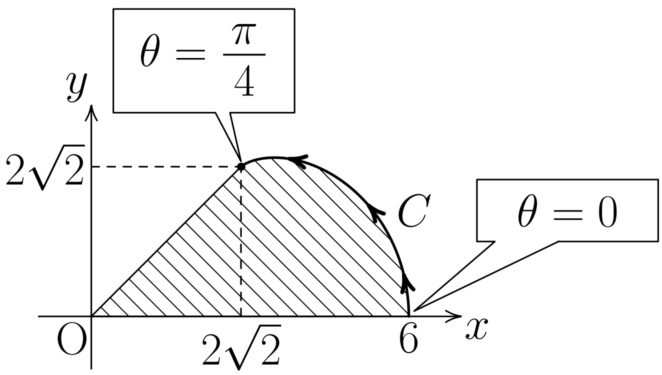
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$		$-$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
x	6	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$
y	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

よって，C の概形は次の通り．



(答)

(2)　次の図の斜線部の面積 S を求めればよい。



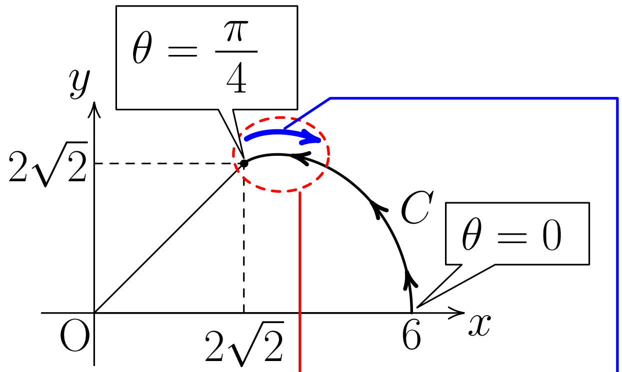
S を求める式を作る手順

(step1)

$$\int_{\square}^{\square} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

と言う積分を考える。((x, y) は C 上の点)

□には 0 と $\frac{\pi}{4}$ のいずれかが入るが，それを判断するには以下のようにする。



(step2)

この積分は

$$y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = y\,dx$$

を足し合わせる形であるから，

y が最大の付近で

$dx > 0 \iff x$ が増加

となるように，C 上の点 (x, y) を動かす方向を考える。

(step3)

θ を $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ **から 0 に向かって動かす**ことになり，

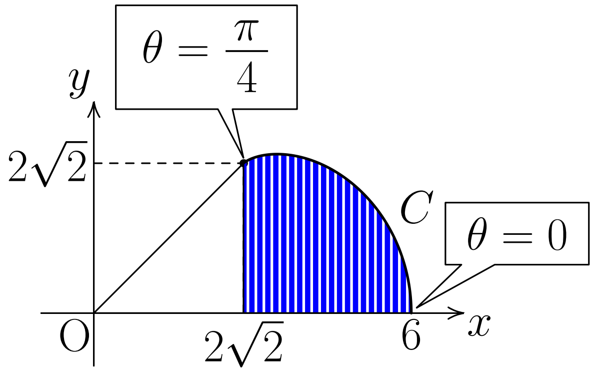
- 積分区間の下端が $\frac{\pi}{4}$
- 上端が 0

となる。つまり，定積分は $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$ となる。

(step4)

　この定積分がどのような図形の面積を表しているかを，p.20 のパラパラ漫画のように考える。

　すると，この定積分は次の図の斜線部の面積を表していると分かる。



(step4)

　したがって，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta + \underbrace{\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2}_{\text{直角二等辺三角形}}$$

と分かる。

　以上の考察をしておいて，(2) の解答は次のように書けばよい。

【(2) の解答】

　求める面積 S は

$$S = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta}_{(x,y)\text{ は }C\text{ 上の点}} + \underbrace{\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2}_{\text{直角二等辺三角形}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (5\sin\theta + \sin 5\theta)(-5\sin\theta - 5\sin 5\theta)\,d\theta + 4$$

$$= 5\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (5\sin\theta + \sin 5\theta)(\sin\theta + \sin 5\theta)\,d\theta + 4$$

$$= 5\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (5\sin^2\theta + 6\sin 5\theta\sin\theta + \sin^2 5\theta)\,d\theta + 4$$

ポイント

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

を用いて次数を下げる。

$$= 5\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(5\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 6\cdot\frac{-1}{2}(\cos 6\theta - \cos 4\theta) + \frac{1-\cos 10\theta}{2}\right)\,d\theta + 4$$

$$= 5\left[3\theta - \frac{5}{4}\sin 2\theta - \frac{\sin 6\theta}{2} + \frac{3}{4}\sin 4\theta - \frac{\sin 10\theta}{20}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + 4$$

$$= \frac{15}{4}\pi \qquad \blacksquare$$

1.5　グリーンの定理 (面積版)

媒介変数表示の曲線についての積分をまとめた「グリーンの定理」を紹介しよう。

まず, xy 平面上の**閉曲線**(へいきょくせん)C とは, 連続関数 $f(t)$, $g(t)$ を用いて,

$$C : x = f(t), \quad y = g(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

と表される曲線であり，しかも,

- $(f(a),\ g(a)) = (f(b),\ g(b))$ (C の始点と終点が一致している，ということ)

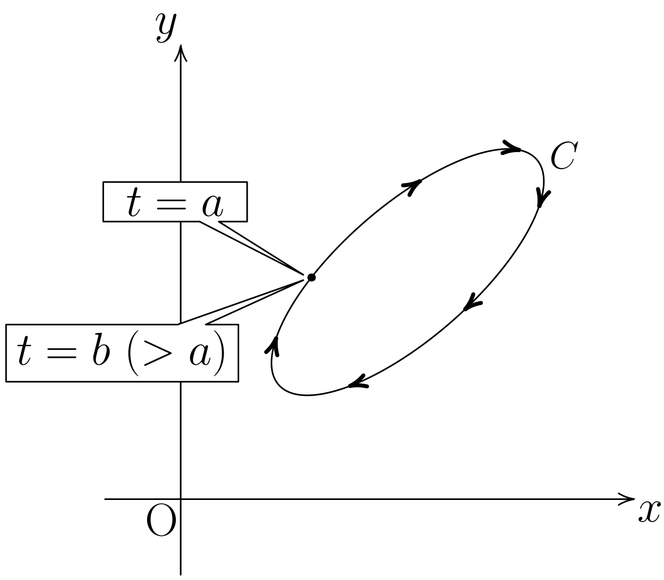
- $a < t_1 < t_2 < b$ を満たす任意の t_1，t_2 については,

$$(f(t_1),\ g(t_1)) \neq (f(t_2),\ g(t_2))$$

(C は，「8 の字」のような自己交差はしない，ということ)

を満たすものである.

例えば，次の図のように「輪」を描く曲線 C が閉曲線である.



さらに，

- $x = f(t)$，$y = g(t)$ は有限個の t を除いて，微分可能 (ところどころ尖っているのは構わないが，そこ以外は滑らかということ．これは置換積分するための条件だ．)
- $f(t)$ と $g(t)$ が連続なので，t を a から b まで動かすと C 上の点 $(x,\ y)$ は **C 上を一定の向きに動く**．ここでは，仮に上図の矢印のように時計回りに動くとする．(重要なのは一定の向きに点が動くと言うこと．だから反時計回りでもよい．(^^;; ここでは、仮に「時計まわり」と決めただけ．)

としよう．

「正の面積・負の面積」の考え方を用いると，次の定理が明らかである．

グリーンの定理 (面積版)

xy 平面上の，前の図のような閉曲線 C について，C により囲まれている図形の面積 S は

$$S = \int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt = \int_b^a x\frac{dy}{dt}\,dt = \left(-\int_a^b x\frac{dy}{dt}\,dt\right)$$

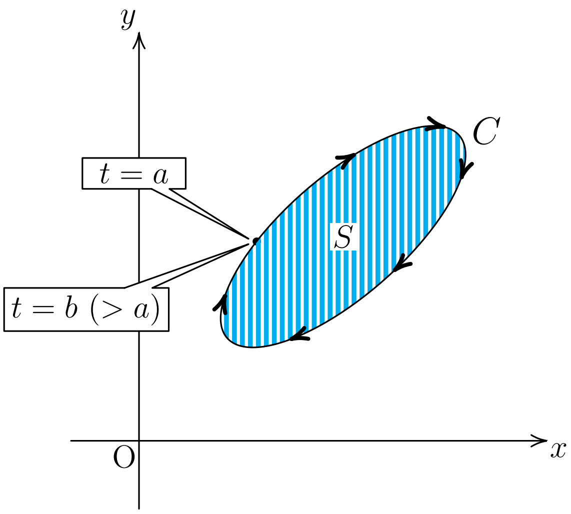
と表される．(**注意！**　積分区間の上下の決め方は，媒介変数 t を増加させるときに 点 (x, y) がどちらの向きに動くかによる．下記を参照せよ。)

〜積分区間の上下の決め方！〜

- $S = \displaystyle\int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$ の積分区間の上端・下端は，C 上の y が**最大**

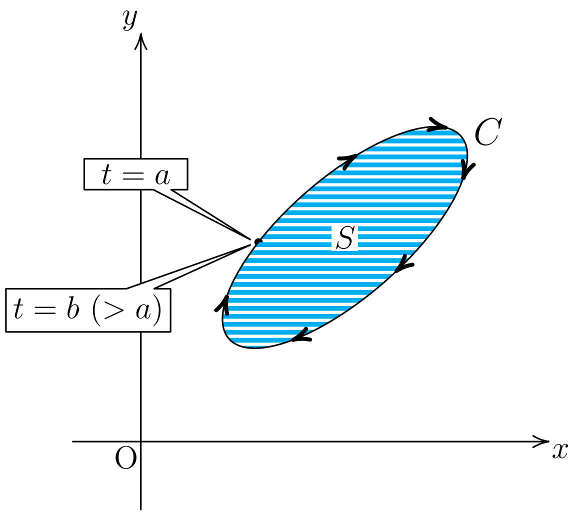
の付近で、$dx > 0 \iff x$ が**増加**となるように決める。(詳しくは p. 37 第 1.5.4 節を参照せよ．)

- $S = \displaystyle\int_b^a x\frac{dy}{dt}\,dt$ の積分区間の上端・下端は，C 上の x が**最大**の付近で、$dy > 0 \iff y$ が**増加**となるように決める。



$$S = \int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$$

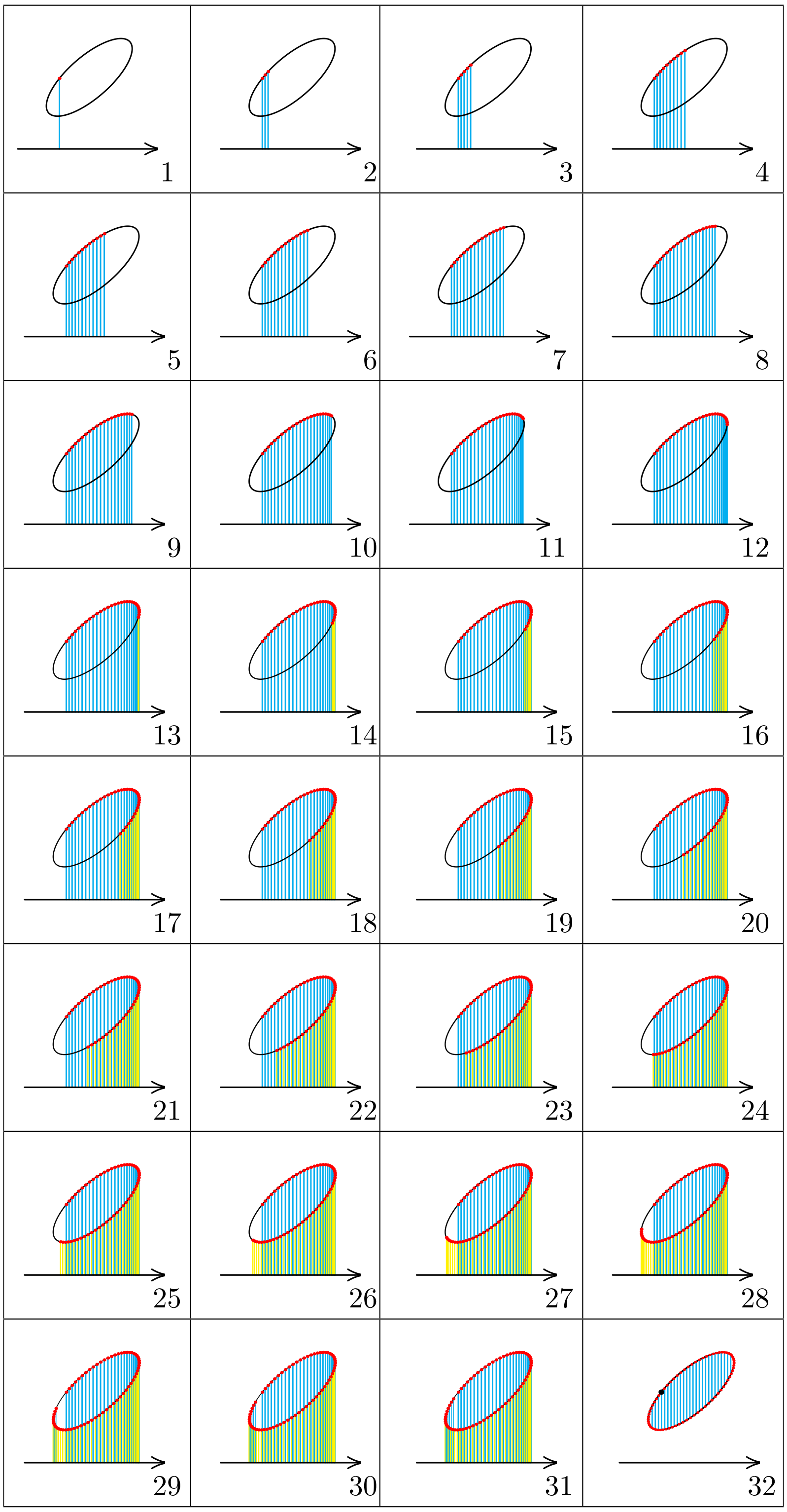
となることを，p.32 のパラパラ漫画で確認せよ。



$$S = \int_b^a x\frac{dy}{dt}\,dt$$

となることを，p.33 のパラパラ漫画で確認せよ。

1.5.1　パラパラ漫画〜$S = \int_a^b y \frac{dx}{dt}\, dt$ の確認



パラパラ漫画実況中継

図 1 を見よ。積分区間の下端 $t = a$ に対する点から点 (x, y) ● はスタート。t が a から b まで動くとき (x, y) は時計回りに動くと仮定しているので，● は右上に向かって動き始める。x が増加 $\iff$ $dx > 0$ であり，$y > 0$ であるから $y\frac{dx}{dt}\,dt = y\,dx$ は、正の面積。図では青い線で表している。C の下側の余計な面積まで加えている。

$y\,dx$ は 12 番までが正の面積。13 番から点 ● が左下に動き始め、$y\,dx$ は**負の面積**になり，余計な面積を削り始める。負の面積は図では 黄色い線 で表している。

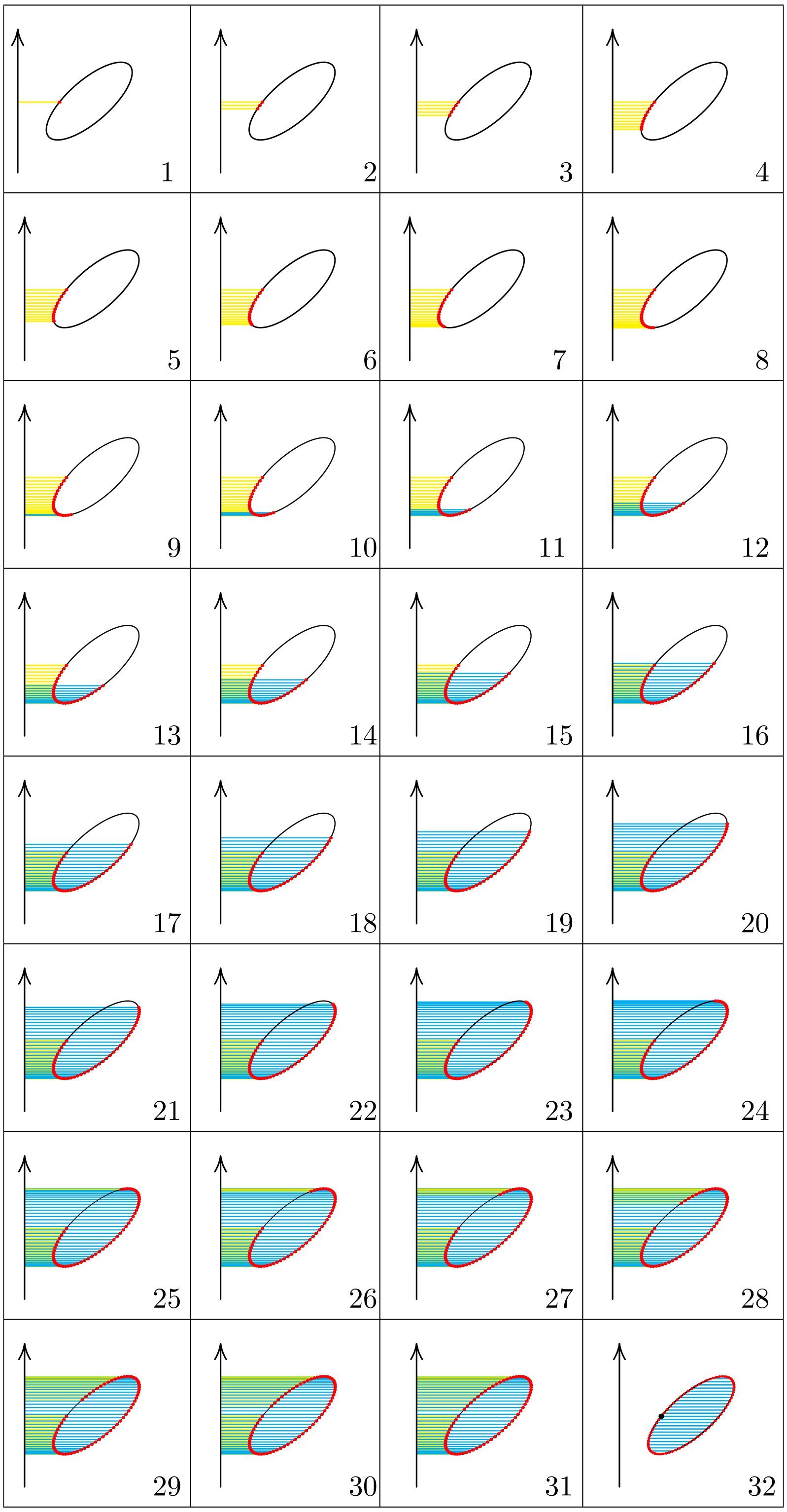
● が左に動き、24 番までで「1 番〜12 番」での余計な面積を消し去った。

25 番から 28 番は、負の面積だけ加えている。つまり，何もないところから面積を引いている。

29 番から ● が右上に動き始め、$y\,dx$ は再び「正の面積」になる。25 番〜38 番で加えた「負の面積」を少しずつ打ち消し、同時に C の内部の面積を加えている。32 番において，積分区間の上端 $t = b$ に対する点 ●(スタートと同じ点) に ● は戻り，C で囲まれた面積だけが残る。

＼(＾ｏ＾)／

1.5.2　パラパラ漫画〜$S = \displaystyle\int_b^a x\frac{dy}{dt}\,dt$ の確認



パラパラ漫画実況中継

図 1 を見よ。積分区間の下端 $t = b$ に対する点から点 (x, y) ● はスタート。「t が a から b まで動くとき (x, y) は時計回りに動く」と仮定しているので，$t = b$ からスタートした場合は**反時計回り**に動く。つまり，● は**左下**に向かって動き始める。

y が現象　$\iff$　$dy > 0$ であり，$x > 0$ であるから $x\dfrac{dy}{dt}\,dt = x\,dy$ は、負の面積。

図では 黄色い線 で表している。

8 番まで C の左側の面積を引いている。

9 番から点 ● が右上に動き始め、$x\,dy$ は**正の面積**になる。図では青い線で表している。引きすぎた面積を打ち消し，C の内部の面積を加えていく。16 番までで「1 番〜8 番」での余計な面積を消し去った。

17 番から 24 番まで，C の左側の余分な面積も加えていく。

25 番から ● は左下に動き，$x\,dy$ は負の面積。「17 番〜24 番」で加えた余計な面積を少しずつ打ち消している。

32 番において，積分区間の上端 $t = a$ に対する点 ●(スタートと同じ点) に ● は戻り，C で囲まれた面積だけが残る。

＼(＾ｏ＾)／

1.5.3　グリーンの定理の練習

問題

媒介変数tを用いて, $x = t^3 - 3t$, $y = 1 - t^2$　$(-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3})$ と表された曲線Cの概形をかき、Cによって囲まれる図形の面積Sを求めよ.

$(S = \displaystyle\int_{\square}^{\square} y\frac{dx}{dt}\,dt$ と $S = \displaystyle\int_{\square}^{\square} x\frac{dy}{dt}\,dt$ の両方の形で計算してみよう.)

(解答は次ページ)

【解答】

$x(t)=t^3-3t$, $y(t)=1-t^2$ とおくと，$x(-t)=-x(t)$, $y(-t)=y(t)$ であるから，曲線 C の $-\sqrt{3}\leqq t\leqq 0$ の部分と $\sqrt{3}\geqq t\geqq 0$ の部分は y 軸について対称である．

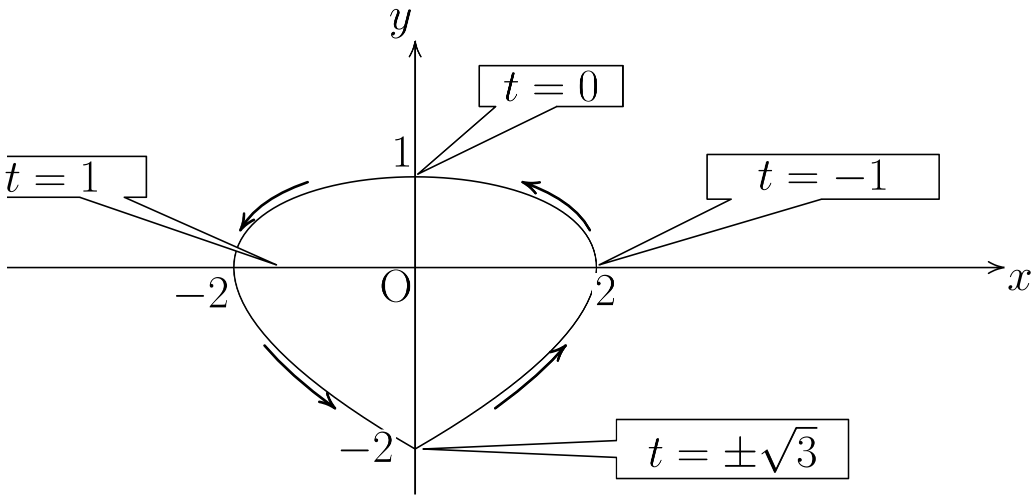
$$\frac{dx}{dt}=3t^2-3, \quad \frac{dy}{dt}=-2t$$

$t\geqq 0$ において (x,y) の動きは次の表のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$-$		$-$	
(x,y)	$(0,\ 1)$	$\swarrow$	$(-2,\ 0)$	$\searrow$	$(0,-2)$

(ただし，$\swarrow$ などは，(x,y) の動く方向を表す．)

以上より，題意の曲線 C の概形は次のようになる．



C で囲まれた図形の面積 S はグリーンの定理より

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} y\frac{dx}{dt}\,dt \quad (\text{積分区間の上下の決め方は p. 30 を参照せよ}) \\
&= \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} (1-t^2)(3t^2-3)\,dt \\
&= 3\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2-1)^2\,dt \quad (\text{偶関数の定積分の性質を使おう}) \\
&= 6\int_{0}^{\sqrt{3}} (t^2-1)^2\,dt \\
&= 6\int_{0}^{\sqrt{3}} (t^4-2t^2+1)\,dt \\
&= 6\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^{\sqrt{3}} = \underline{\frac{24}{5}\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

あるいは、次のようにしても良い.

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\frac{dy}{dt}\,dt \quad (\text{積分区間の上下の決め方は p. 30 を参照せよ}) \\
&= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^3-3t)(-2t)\,dt \\
&= -2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^4-3t^2)\,dt \quad (\text{偶関数の定積分の性質を使おう}) \\
&= -4\int_{0}^{\sqrt{3}} (t^4-3t^2)\,dt = -4\left[\frac{1}{5}t^5-t^3\right]_0^{\sqrt{3}} = \underline{\frac{24}{5}\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

1.5.4　積分区間の上下の決め方〜再説

(★)「$S = \displaystyle\int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$ では，『C 上の y が最大の付近で、$dx > 0 \iff x$ が増加』となるように，積分区間の上下を決める．」(p.30)

ということの意味を詳しく説明しよう．

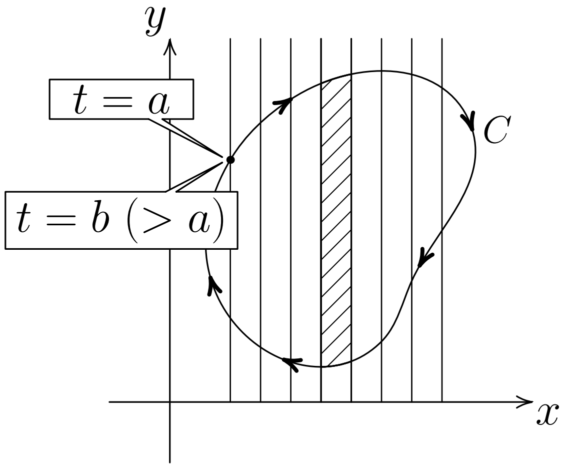
C 上に $y < 0$ となる部分があれば、十分大きな正の数 M に対し、C を y 軸方向に M だけ平行移動して、C は $y \geqq 0$ の部分に含まれるようにしておこう．

このとき、C 上の点の y 座標 y は $Y = y + M$ に変わるが、$\displaystyle\int_a^b Y\frac{dx}{dt}\,dt = \int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$ である．実際、計算してみれば次のようになる．

$$\begin{aligned}
\int_a^b Y\frac{dx}{dt}\,dt &= \int_a^b (y+M)\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= \int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt + \int_a^b M\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= \int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt + \Big[M\,x(t)\Big]_a^b \\
&\qquad (\text{ただし、}t\text{ に対する }C\text{ 上の点の }x\text{ 座標が }x(t)) \\
&= \int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt \quad (\because\ x(a) = x(b))
\end{aligned}$$

よって、C は $y \geqq 0$ を満たすとして一般性を失わない．

閉曲線 C として、次ページのようなものを考えよう。t が a から $b\ (> a)$ まで動くと C 上の点 (x, y) は，時計回り (矢印の向き) に動いて C を一周するとする。



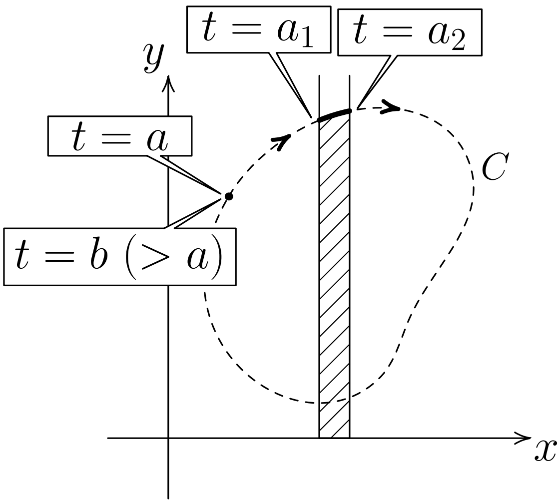
y 軸に平行な直線を何本か引き、C で囲まれた図形を切り分けよう．そして例えば図の斜線部の面積に注目しよう．

$\displaystyle\int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$ の積分区間の上下を (★) のように定めたことの意味は、以下のようになる．

まず、斜線部の四隅の、C 上の点に対する t の値を

$$t = a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \quad (a \leqq a_1 < a_2 < b_1 < b_2 \leqq b)$$

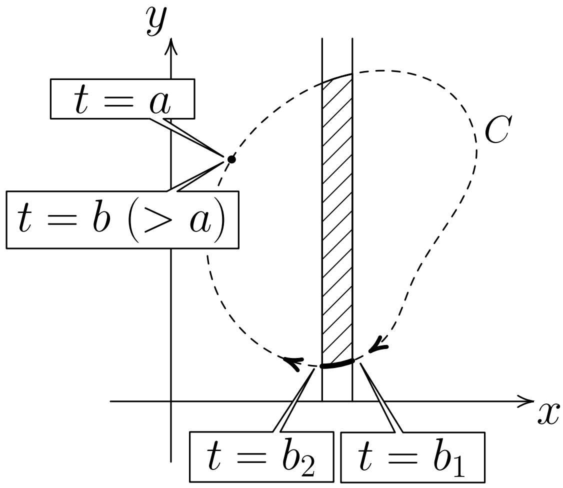
としよう．次の図を参照せよ．



I_1 において、点 (x, y) が C の太線部分を**左から右へ**動く．つまり $dx > 0$ であるから、I_1 では

$$y\frac{dx}{dt}\,dt = y\,dx$$

は**正の面積**となり ($y \geqq 0$ と仮定していた)、I_1 は上図の斜線部の面積になる．(余計な斜線部があることに注意)



I_2 において、点 (x, y) が C の太線部分を**右から左へ**動く．つまり $dx < 0$ であるから、I_2 では

$$y\frac{dx}{dt}\,dt = y\,dx$$

は**負の面積**となり ($y \geqq 0$ と仮定していた)、I_2 により余計な斜線部の面積が除かれる．

$\displaystyle\int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$ の積分区間を分け

$$\int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt = \int_a^{a_1} y\frac{dx}{dt}\,dt + \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} y\frac{dx}{dt}\,dt}_{I_1\text{ とし}}$$

$$+\int_{a_2}^{b_1} y\frac{dx}{dt}\,dt + \underbrace{\int_{b_1}^{b_2} y\frac{dx}{dt}\,dt}_{I_2\text{ とする}} + \int_{b_2}^{b} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

とする．I_1 と I_2 に注目しよう．

以上のように、(★) により積分区間の上下を定めておけば、$\displaystyle\int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$ のうちの「I_1+I_2」が、p.38 の斜線部の面積になることがわかる．

p.38 の図の他の部分の面積についても同様であるから、(★) のように積分区間の上下を定めておけば

$$S = \int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$$

が成り立つことが分かる．

要するに、積分区間の上下の定め方は (y が最大の付近に限らず)

(a) C の上部を点 $(x,\ y)$ が動くとき、$dx > 0$

(b) C の下部を点 $(x,\ y)$ が動くとき、$dx < 0$

となるようにすればよいのだ．

しかし、C の上部、下部というのがあいまいなので (C がグニョグニョと曲がっていたらどうする？)、(★) のように

(c) C 上の y が最大の付近で、$dx > 0 \iff x$ が増加

という言い方にしているのだ．(a) と (b) より、(c) の方が明解だから入試を解くときも使いやすいだろう．

同様にして

$$S = \int_b^a x \frac{dy}{dt}\, dt$$

の場合は、積分区間の上下の定め方は (x が最大の付近に限らず)

(a') C の右側を点 $(x,\ y)$ が動くとき、$dy > 0$

(b') C の左側を点 $(x,\ y)$ が動くとき、$dy < 0$

となるようにすればよいのだが、やはり C の右側、左側というのがあいまいだ．

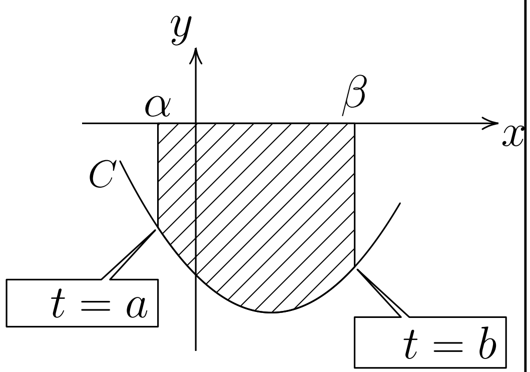
(★) のように

(c') C 上の x が最大の付近で、$dy > 0 \Longleftrightarrow y$ が増加

という言い方にしているのだ．(c) と (c') は統一された表現だから、迷わず使えるだろう．

1.5.5　積分区間の上下の決め方がわからないよ (汗)

質問！



曲線 $C: x=f(t),\ y=g(t)$

の $a \leqq t \leqq b$ における概形が右図のようになり、斜線部の面積 S を求めようとしました．

「C 上の y が最大の付近で、$dx>0 \iff x$ が増加」となるように，積分区間の上下を決める」ということだったので (**p. 30**)、「$t=a$」の付近で x が増加するように、積分区間を $\displaystyle\int_a^b$ としました．

つまり、

$$S=\int_a^b y\frac{dx}{dt}\,dt$$

としました．

でも、これは

$$S=\int_\alpha^\beta y\,dx$$

ということであり、図から

$$y<0, \quad \alpha<\beta$$

となるので

$$S<0 \quad (\text{面積なのに負？？？})$$

になってしまいます．

積分区間の上下の決め方のどこがおかしいのでしょうか？

回　答

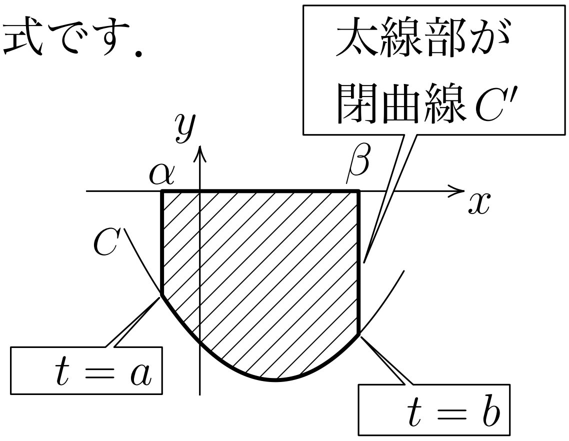
p.30 で解説した「積分区間の上下の決め方」は、**閉曲線**についてのものです．

この問題の C は、閉曲線でありませんから、

$$y\frac{dx}{dt}\,dt = y\,dx$$

が正の面積になるように、積分区間の上下を決めましょう．

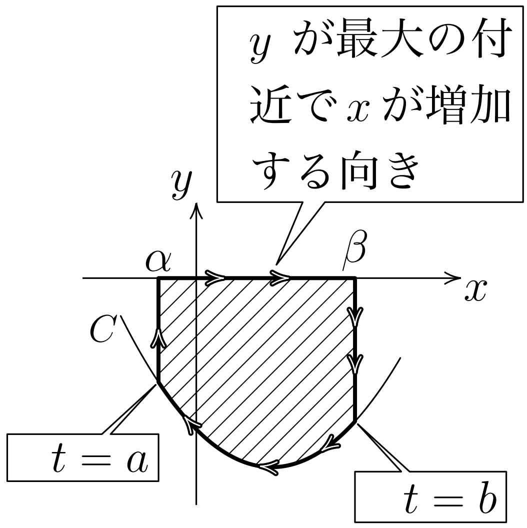
この場合は $y < 0$ ですから、$dx < 0$ となれば $y\,dx > 0$ となり、正の面積です．したがって、x が減少するように、積分区間は $\displaystyle\int_b^a$ とすればよく、$S = \displaystyle\int_b^a y\frac{dx}{dt}\,dt$ が正しい式です．



なお、p.30 の積分区間の上下の決め方を当てはめたいのであれば、右図の太線部のような閉曲線 C' を考えましょう．(C' で囲まれる図形の面積が S です．)

C' において、y が最大なのは x 軸の部分です．

ですから、**この部分で x が増加するように**、C' 上の点 (x, y) を動かしましょう．



つまり、右図の「$\wedge$」の向きに点 (x,y) が動くように積分区間の上下を決めればよい.

さらに、x 軸上では「$y=0$」、x 軸に垂直な線分上では「$dx=0$」ですから、どちらでも「$y\,dx=0$」となります.

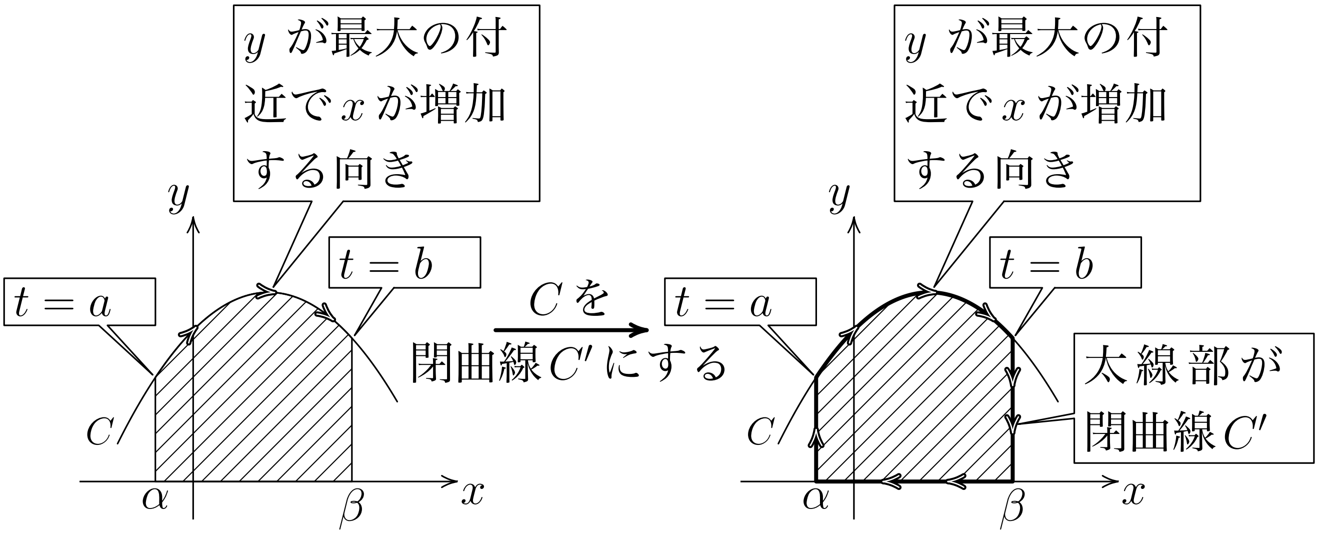
したがって、元々の曲線 C 上での定積分だけ考えればよく、積分区間は $\displaystyle\int_b^a$ となり

$$S=\int_b^a y\frac{dx}{dt}\,dt$$

となることがわかります.

実際の入試問題では、媒介変数表示の曲線 C で面積を求めさせる場合は C の少なくとも一部は $y>0$ の範囲にあります. (媒介変数表示の C 全体が $y\leqq 0$ にあるようなヘンテコな問題は見たことがありません.)

この場合は斜線部の境界線を閉曲線 C' としても、「C 上で y が最大の付近」と、「閉曲線 C' 上で y が最大の付近」が一致します.



　したがって、媒介変数表示の曲線Cで面積を定積分で求める場合、積分区間の上下は「C上でyが最大の付近で、$dx>0 \iff x$が増加する向き」と考えれば、入試問題においてはほとんどのケースで正しくなります.

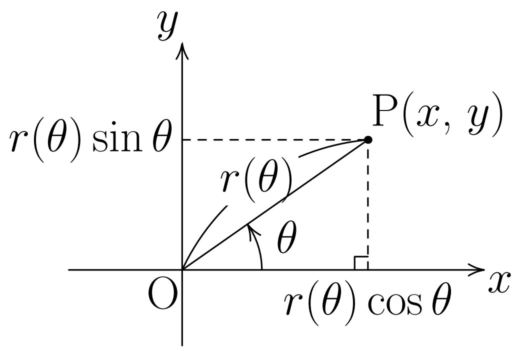
　よって、まずはこのように積分区間の上下を定めて、それが正しいかどうか正の面積・負の面積の考え方により確認するのが、実戦的な考え方です.　■

§2.　極形式と極形式もどきの面積計算

正の面積・負の面積の考え方を利用すると，劇的に計算量が減るパターン「極形式と極形式もどき」を紹介し，計算量が減る理由を納得してもらおう.

2.1　極形式と計算の工夫

2.1.1　極形式



O を原点とする xy 平面において、点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ に対して、

- 線分 OP の長さが $r(\theta)$、
- 線分 OP が x 軸の正方向となす角が θ
(正の角、負の角を区別する)

となるとき、

$$x = r(\theta)\cos\theta,\, y = r(\theta)\sin\theta \quad (\Longleftrightarrow \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = r(\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta))$$

と表される.

このような座標の表し方を**極形式**という.

(**注**)　このときに P の座標を $(r(\theta),\,\theta)$ と表すのが**極座標**である.
極形式は、xy 座標.

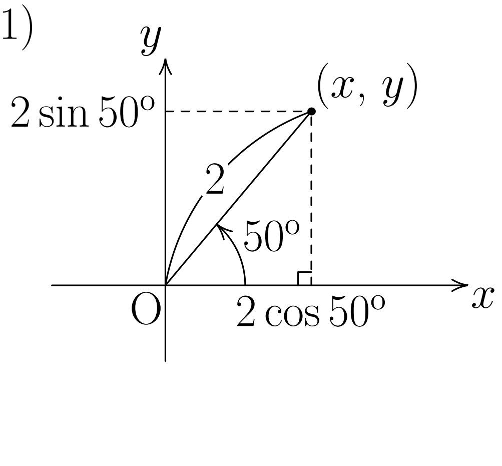
問 3.　次の点をそれぞれ xy 平面に図示せよ．ただし、O は原点とする．

(1) $x = 2\cos 50^{\circ}$, $y = 2\sin 50^{\circ}$ となる点 (x,y).

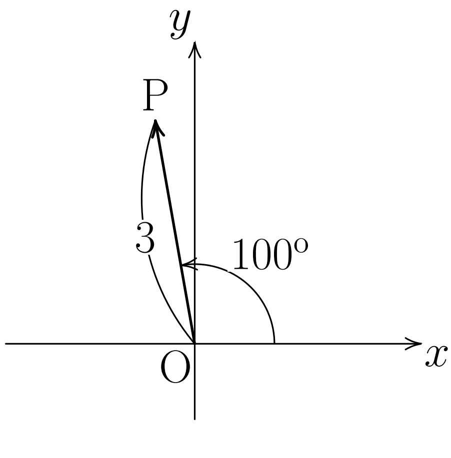
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3(\cos 100^{\circ},\ \sin 100^{\circ})$ となる点 P.

【解答】

(1)



(2)



2.1.2　極形式の面積公式

正の面積・負の面積の考えを利用すると、極形式の面積公式が容易に証明出来る．

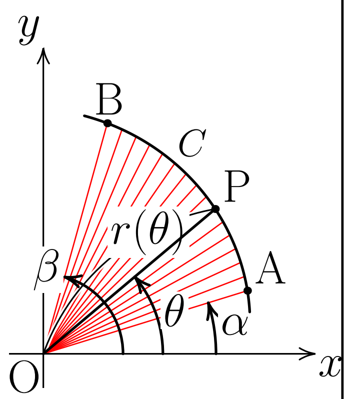
極形式の面積公式

Oを原点とする xy 平面上に

$$\text{曲線}\, C : x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$$

$$(r(\theta) \geqq 0)$$

があり，C 上の $\theta = \alpha, \beta\ (0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$ に対する点をそれぞれA，Bとする．

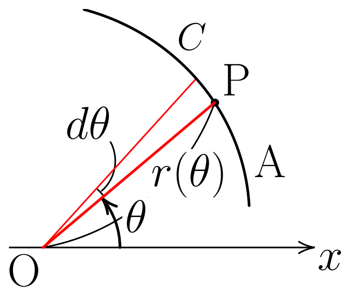


2つの線分OA，OBと曲線 C とで囲まれる図形の面積 S は，

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r(\theta)^2\, d\theta$$

(式の意味)

半径が $r(\theta)$ で, 中心角が $d\theta$ である扇形の面積「$\dfrac{1}{2}r(\theta)^2\, d\theta$」を足す ($\displaystyle\int$) ということ．

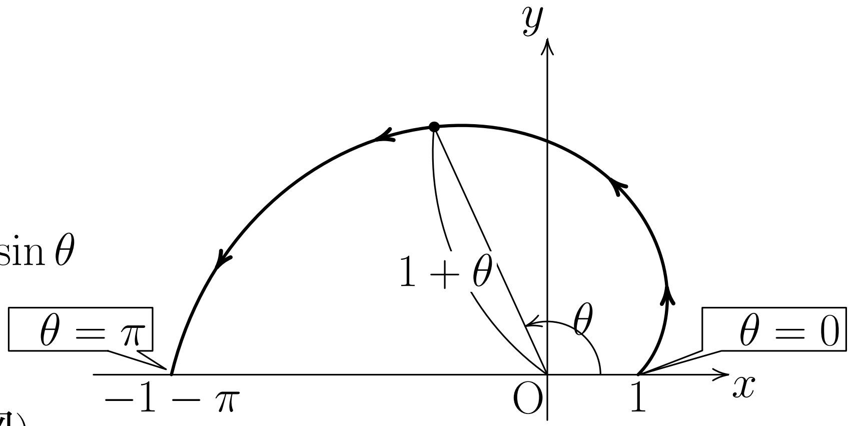


この公式は，具体的な C について，面積がこの結果で表されることを導けるようにするのが重要である．

次の問題で，扱ってみよう．

問 4.

$f(\theta)=1+\theta$ のとき、



$$C: x=f(\theta)\cos\theta, y=f(\theta)\sin\theta$$

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

とする．(C の概形は右の図)

C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S は

$$S=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}f(\theta)^2\,d\theta$$

と表されることを示し、S を求めよ．(**解答は次ページ**)

【解答】

$$f = f(\theta), \quad f' = f'(\theta), \quad s = \sin\theta, \quad c = \cos\theta$$

と表すと

$x = f\,c$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = f'\,c - f\,s$

$y = f\,s$ より $\dfrac{dy}{d\theta} = f'\,s + f\,c$

(正の面積，負の面積の考え方を用いて)

$$\begin{aligned} S &= \int_\pi^0 y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= -\int_0^\pi f\,s(f'\,c - f\,s)\,d\theta \\ &= \int_0^\pi (-f f'\,s\,c + f^2\,s^2)\,d\theta \end{aligned} \qquad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^\pi f\,c(f'\,s + f\,c)\,d\theta \\ &= \int_0^\pi (f f'\,s\,c + f^2\,c^2)\,d\theta \end{aligned} \qquad \cdots ②$$

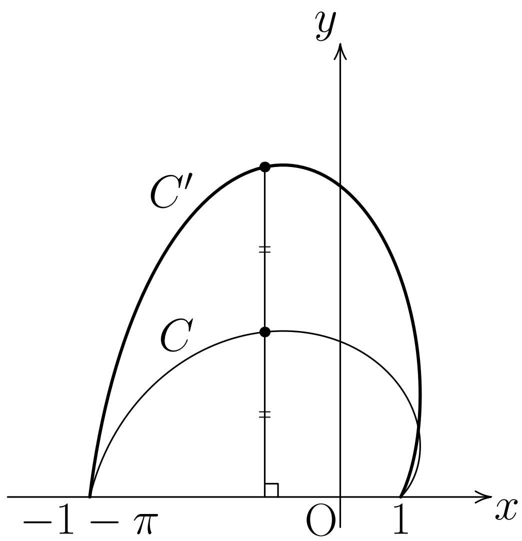
(① + ②) $\div\, 2$ より

$$\underline{S = \int_0^\pi \frac{1}{2} f(\theta)^2\,d\theta}$$

よって

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1+\theta)^2\, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{6}(1+\theta)^3\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{6}\{(1+\pi)^3 - 1\} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.1.3　極形式もどきの面積計算



問 4 の曲線 C を y 軸方向に 2 倍して，曲線 C' としよう．

すなわち，

$$C' : x = f(\theta)\cos\theta,\ y = 2f(\theta)\sin\theta \qquad \cdots ③$$

となる．$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

C' は，**極形式ではない**．何故ならば，

$$C' : x = \boldsymbol{f(\theta)}\cos\theta, \quad y = \boldsymbol{2f(\theta)}\sin\theta$$

の**太字**の部分が異なるからだ．

C と x 軸とで囲まれる図形の面積を S とし，C' と x 軸とで囲まれる図形の面積を S' とすると，

$$S' = 2S$$

となるから (y 軸方向に 2 倍したから！)，問 4 の結果を代入して

$$S' = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} f(\theta)^2\, d\theta \qquad \cdots ④$$

となる．

C' は極形式ではないのに，極形式の場合のように，簡単な定積分で面積が表されるのである．

それでは，④を③から直接導くにはどうしたらいいのだろうか？

そのためには，**極形式の面積公式を証明した方法が役に立つ．**

極形式の面積公式を証明するには，

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt}\,dt = -\int_{\alpha}^{\beta} x \frac{dy}{dt}\,dt$$

から，

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} \right) dt$$

という計算をした．これにより，

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r(\theta)^2\,d\theta$$

という非常に簡単な式になった．

この方法を ③ に当てはめれば，④が導かれる！

問 5. 上記のことを確かめよ．(解答は次ページ)

【解答】

C' と x 軸とで囲まれる図形の面積を S' とする．③において

$$f=f(\theta),\quad f'=f'(\theta),\quad s=\sin\theta,\quad c=\cos\theta$$

と表すと

$$x=f\,c \text{ より } \frac{dx}{d\theta}=f'\,c-f\,s$$

$$y=2f\,s \text{ より } \frac{dy}{d\theta}=2f'\,s+2f\,c$$

(正の面積，負の面積の考え方を用いて)

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\pi}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= -\int_{0}^{\pi} 2f\,s(f'\,c-f\,s)\,d\theta \\ &= 2\int_{0}^{\pi}(-f\,f'\,s\,c+f^2\,s^2)\,d\theta \qquad \cdots⑤ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' &= \int_{0}^{\pi} x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} f\,c(2f'\,s+2f\,c)\,d\theta \\ &= 2\int_{0}^{\pi}(f\,f'\,s\,c+f^2\,c^2)\,d\theta \qquad \cdots⑥ \end{aligned}$$

(⑤ + ⑥) ÷ 2 より

$$\underline{S'=2\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}f(\theta)^2\,d\theta} \quad (\text{証明終わり})$$

問5と同様に考えると，曲線Cが

$$x = a\,r(\theta)\cos\theta,\quad y = b\,r(\theta)\sin\theta \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\theta)\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$$

と表される場合や(a，bは定数)，$\cos$と$\sin$を入れ替えて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\theta)\begin{pmatrix} a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$$

と表される場合も先ほどの方法で面積計算が簡単になることが分かる。

さらにこれらを足して，余計な項を足した形でも同様だ。

つまり

$$C:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\theta)\begin{pmatrix} a\ \cos\theta \\ b\ \sin\theta \end{pmatrix} + R(\theta)\begin{pmatrix} p\sin\theta \\ q\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(\theta) \\ v(\theta) \end{pmatrix} \quad (a,b,p,q\text{は定数})$$

という「**極形式もどき**」(適当な名前が無いので本書で付けたかりの名称) の場合も，同様の計算で面積計算が簡単になる。($u(\theta)$や$v(\theta)$が余り複雑になると困るが，入試では定数程度の簡単な項なので大丈夫)

極形式と極形式もどきの面積を簡単にする方法

曲線Cが極形式または極形式もどきの場合(これらを足した形でもいいし，チョット余計な項が足されていてもよい)，Cを境界線(の一部)にもつ図形の面積Sは，

- Sを$\displaystyle\int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}\,dt$を用いて表した式
- Sを$\displaystyle-\int_\alpha^\beta x\frac{dy}{dt}\,dt$を用いて表した式

の2つを作り，足して2で割るとSの計算が簡単になる。

もちろん，積分区間の上下はp.30で説明したように定める．

注意！

このようにすると，Cが閉曲線の場合は，極形式であるかどうかに関係なく，それが囲む図形の面積がSの場合は

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)dt \qquad \cdots ⑦$$

となる。これを「ガウス・グリーンの定理」と言うが，普通はこれを用いると計算量が2倍に増えてしまい入試では役に立たない。**この方法で計算が楽になるのは，極形式と極形式もどき**の場合(これらを足した形でもいいし，チョット余計な項が足されていてもよい)だと言うことが重要だ。

このことを次の問題で確かめてみよう．

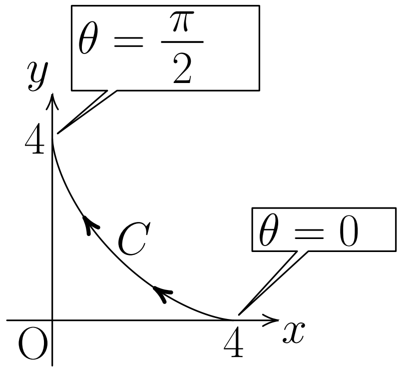
2.1.4　極形式と極形式もどきの面積計算〜1

問6.

曲線 C は

$x = \cos 3\theta + 3\cos\theta,\ y = 3\sin\theta - \sin 3\theta$

$$\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



と表され，その概形は右の図のようになる.

C と x 軸、y 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(解答は次ページ)

ポイント

C は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ -\sin 3\theta \end{pmatrix}}_{\text{極形式もどき}} + 3\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}}_{\text{極形式}}$$

と言う「極形式と極形式もどきを足した形」であるから，

- S を $\displaystyle\int y\frac{dx}{d\theta}d\theta$ を用いて表した式
- S を $\displaystyle\int x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$ を用いて表した式

の2つを作り，足して2で割るとよい。

【解答】

グリーンの定理より (注．正の面積・負の面積の考え方を使うときは『グリーンの定理より』と書けばよい)

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \qquad \cdots ①$$

(注.y が最大の付近で, x が増加 $\iff$ $dx > 0$ としたいから，

積分区間は $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}$ となる。

この式で S が表されるのは, p.59 のパラパラ漫画を見よ)

$$= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin 3\theta + 3\sin\theta)(-3\sin 3\theta - 3\sin\theta)\,d\theta$$

$$= 3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 3\theta + 2\sin 3\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta)\,d\theta \qquad \cdots ②$$

となる。また,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{d\theta}\, d\theta \qquad \cdots ③$$

(注.x が最大の付近で, y が増加 $\iff$ $dy > 0$ としたいから,

積分区間は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ となる。

この式で S が表されるのは, p.60 のパラパラ漫画を見よ)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta + 3\cos\theta)(-3\cos 3\theta + 3\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 3\theta - 2\cos 3\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta)\, d\theta \qquad \cdots ④$$

ともなる。

(② + ④) ÷ 2 より

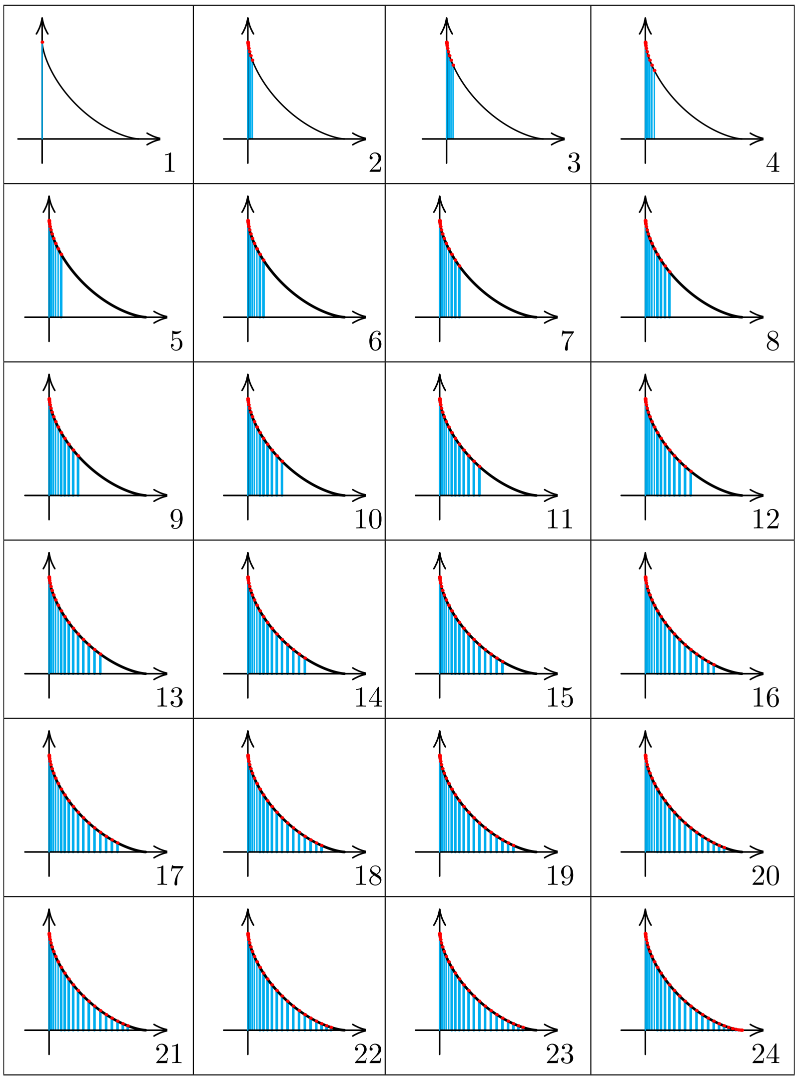
$$S = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 \underbrace{- \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta}_{\text{加法定理で簡単になる}})\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta$$

$$= 3\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi}{2} \quad (答)$$

p.57①の $S = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$ を確認



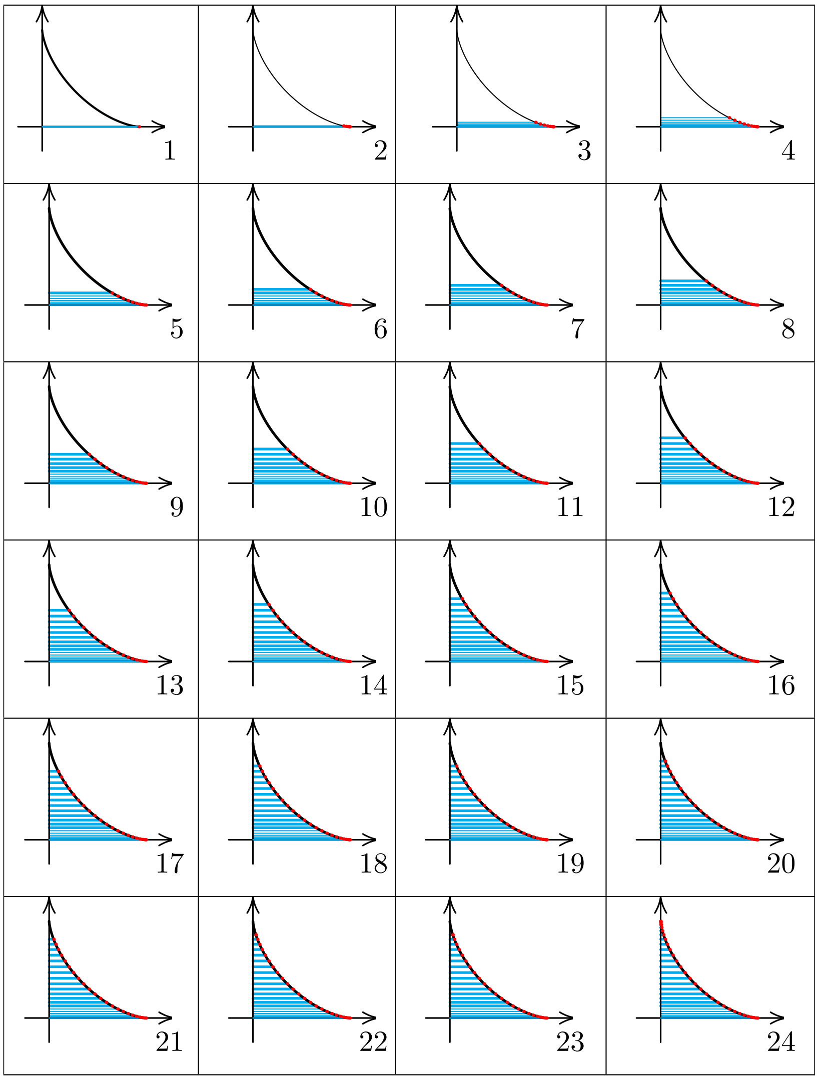
パラパラ漫画実況中継

図 1 を見よ。積分区間の下端 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に対する点から点 (x,y) ● はスタート。この C では θ が $\frac{\pi}{2}$ から 0 まで動くとき (x,y) は右下に向かって動くので, x が増加 $\iff$ $dx > 0$ であり，$y > 0$ であるから $y\dfrac{dx}{dt}\,dt = y\,dx$ は、正の面積。図では青い線で表している。

$y\,dx$ はずっと正の面積であり (簡単！)，24 番において，積分区間の上端 $\theta = 0$ に対する点に ● は達し，C と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S になる。

＼(＾o＾)／

p.58③の $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$ を確認



パラパラ漫画実況中継

図 1 を見よ。積分区間の下端 $\theta=0$ に対する点から点 (x,y) ● はスタート。この C では θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき (x,y) は左上に向かって動くので, y が増加 $\Longleftrightarrow$ $dy>0$ であり，$x>0$ であるから $x\dfrac{dy}{dt}\,dt = x\,dy$ は、正の面積。図では青い線で表している。

$x\,dy$ はずっと正の面積であり (簡単！)，24 番において，積分区間の上端 $\theta=\frac{\pi}{2}$ に対する点に ● は達し，C と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S になる。＼(＾o＾)／

2.1.5　極形式と極形式もどきの面積計算〜2

問 7.

原点を O とする xy 平面上に

$$\text{曲線}C : x = 5\cos\theta + \cos 5\theta, \quad y = 5\sin\theta + \sin 5\theta \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

がある.

(1)　C の概形を描け.

(2)　C の両端と O を結んでできる 2 本の線分，および C によって囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(解答は次ページ)

【解答】

(1)

$$x = 5\cos\theta + \cos 5\theta,\ y = 5\sin\theta + \sin 5\theta$$

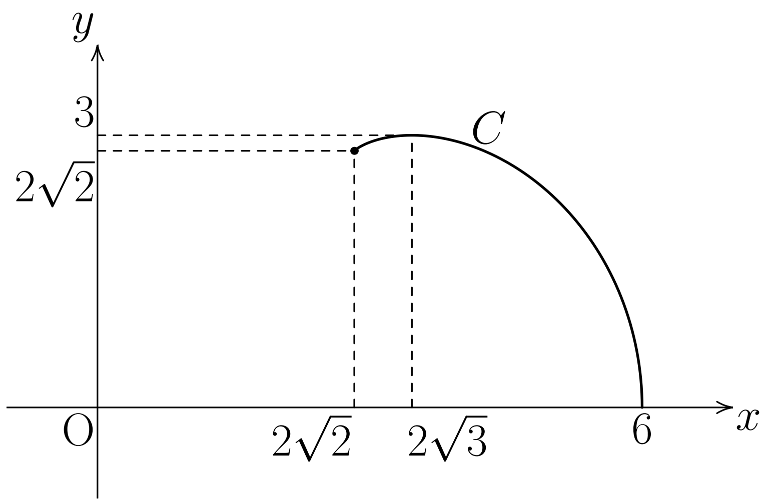
より

$$\frac{dx}{d\theta} = -5(\sin\theta + \sin 5\theta) = -10\sin 3\theta\cos 2\theta \leqq 0$$

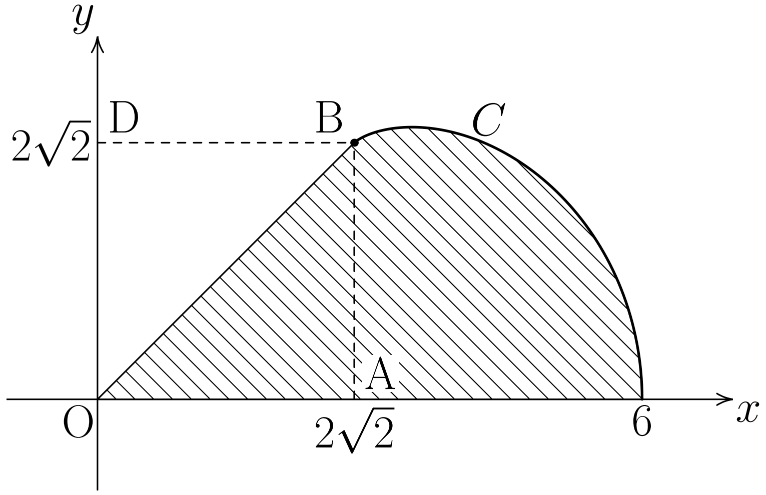
$$\frac{dy}{d\theta} = 5(\cos\theta + \cos 5\theta) = 10\cos 3\theta\cos 2\theta$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$		$-$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
x	6	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$
y	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

よって，C の概形は次の通り．



(2) 次の図の斜線部の面積が S である。



ただし，$\mathrm{A}(2\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{B}(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $\mathrm{D}(0, 2\sqrt{2})$ である。

グリーンの定理より

$$S - \triangle\mathrm{OAB}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \qquad \cdots ①$$

(注．これが成り立つ理由は次ページのパラパラ漫画を見よ。)

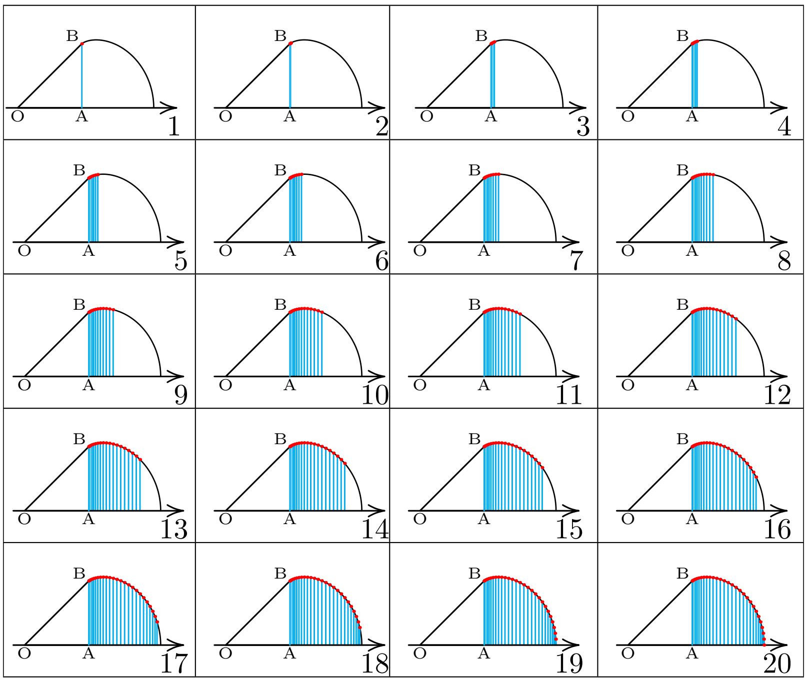
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (5\sin\theta + \sin 5\theta)(-5\sin\theta - 5\sin 5\theta)\,d\theta$$

(5 を前に出し、積分区間の上下を入れ替えよう)

$$= 5\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (5\sin\theta + \sin 5\theta)(\sin\theta + \sin 5\theta)\,d\theta$$

$$= 5\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (5\sin^2\theta + 6\sin 5\theta\sin\theta + \sin^2 5\theta)\,d\theta \qquad \cdots ②$$

前ページ①の $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = S - \triangle\mathrm{OAB}$ を確認



パラパラ漫画実況中継

図 1 を見よ。積分区間の下端 $\theta = \frac{\pi}{4}$ に対する点 B から点 (x,y) ● はスタート。この C では θ が $\frac{\pi}{4}$ から 0 まで動くとき (x,y) は右に向かって動くので，x が増加 $\iff$ $dx > 0$ であり，$y > 0$ であるから $y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = y\,dx$ は、正の面積。図では青い線で表している。

$y\,dx$ はずっと正の面積であり（簡単！），20 番において，積分区間の上端 $\theta = 0$ に対する点に ● は達し，

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = S - \triangle\mathrm{OAB}$$

と分かる。＼(＾ｏ＾)／

(解答の続き)

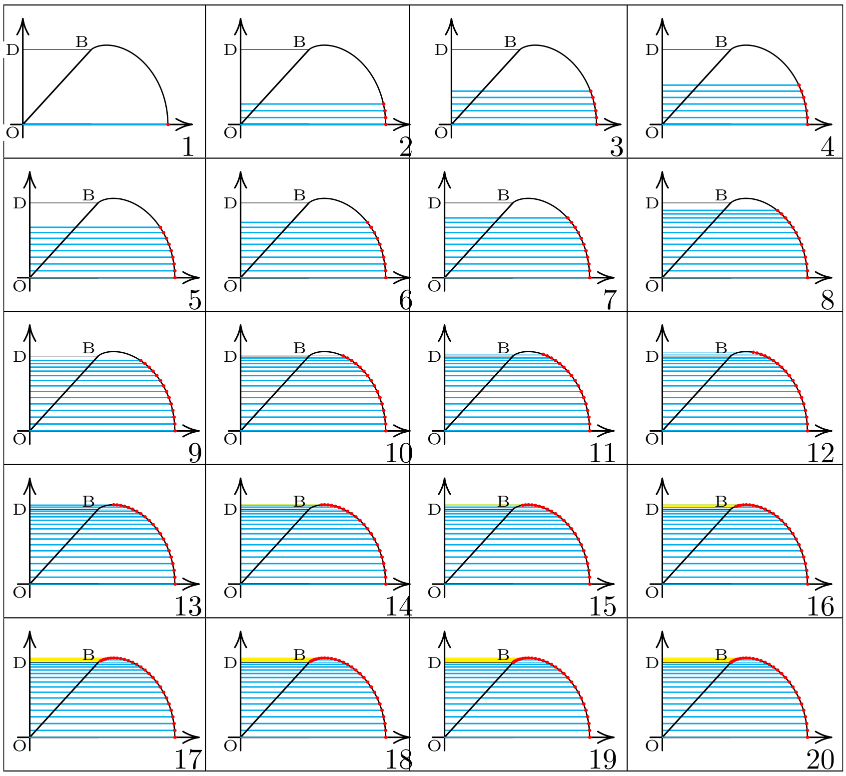
$$S + \triangle\mathrm{OBD} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta \qquad \cdots③$$

(注．これが成り立つ理由は次ページのパラパラ漫画を見よ)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5\cos\theta + \cos 5\theta)(5\cos\theta + 5\cos 5\theta)\,d\theta$$

$$=5\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5\cos^2\theta + 6\cos 5\theta\cos\theta + \cos^2 5\theta)\,d\theta \qquad \cdots④$$

前ページ③の $\displaystyle\int_{\frac{0}{\pi}4}^{x}\frac{dy}{d\theta}\,d\theta=S+\triangle\mathrm{OBD}$ を確認



パラパラ漫画実況中継

積分区間の下端 $\theta=0$ に対する点から点 (x,y) ● はスタート。θ が 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで動くとき (x,y) は，まず左上に向かって動くので $dy>0$。これと $x>0$ より $x\dfrac{dy}{d\theta}\,d\theta=x\,dy$ は、正の面積 (青い線)。

13 番で y が最大。ここから (x,y) は左下に向かって動き y が減少するから $dy<0$。これと $x>0$ より $y\,dx$ は負の面積 (黄色い線) に変わる。14 番以降 C の左側の面積を少しずつ打ち消していく。

20 番において，積分区間の上端 $\theta=\frac{\pi}{4}$ に対する点 B に ● は達し，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta=S+\triangle\mathrm{OBD}$$

と分かる。＼(＾o＾)／

(解答の続き)

②＋④とすると、$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OBD}$ より $\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OBD}$ が消えて (＼(^O^)／)

$$2S=5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{5+6(\cos5\theta\cos\theta+\sin5\theta\sin\theta)+1\}\,d\theta$$

$$\therefore \quad S = 5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{3 + 3\cos(5\theta - \theta)\}\, d\theta$$

(グリーンの定理を用いたおかげで、計算がものすごく簡単になっている)

$$= 15\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \underline{\frac{15}{4}\pi}$$

(**注**) ② をそのまま計算すると

$$S - \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 y\frac{dx}{d\theta}\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (5\sin\theta + \sin 5\theta)(-5)(\sin\theta + \sin 5\theta)\, d\theta$$

$$= 5\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5\sin^2\theta + 6\sin\theta\sin 5\theta + \sin^2 5\theta)\, d\theta$$

$$= 5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{5}{2}(1 - \cos 2\theta) - 3(\cos 6\theta - \cos 4\theta) + \frac{1}{2}(1 - \cos 10\theta)\right\} d\theta$$

$$= 5\left[3\theta - \frac{5}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 6\theta + \frac{3}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{20}\sin 10\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{15}{4}\pi - 4 \qquad \text{(ちょっと大変)}$$

$$\therefore \quad S = \frac{15}{4}\pi$$

取りあえずのあとがきと予告

(version 0.8 のあとがき)

極形式と極形式もどきの面積計算を追加し，version 0.8 としました。このことをちゃんと書いてある本は見たことありませんので，役に立つと思います。

(version 0.7 のあとがき)

ここで終り？と思われたでしょう。私のブログでこの本を7月末に出すと約束しましたが，ここまでしかできませんでした。ごめんなさい。

ここまでの部分でも媒介変数表示された曲線Cについての面積計算に役立つと思います。C上の点のy座標やx座標が最大の点の座標を具体的に求めるのが大変という入試問題もありますが，そんなのは分からなくても大丈夫だとここまでの内容で納得出来ると思いますから。

しかし，本書には書くべきことがたくさんあります。

1. バームクーヘンってなんだ？

2. グリーンの定理ってなんだ？

3. 最後の芝浦工大の問題は計算がメチャクチャ大変だ。何とかならないのか？

4. そもそも，その問題はなぜ直角二等辺三角形が付け加わっているんだ？

5. 積分区間の上端と下端の定め方はどう言う意味なの？

などなど山ほどありますが，実は私は自分の授業でこの内容を解説するためのプリントは昔から作って使っているので本の材料は既にできているのです。私の生徒ならここに書かれていることをみて「いつものプリントの初めの方じゃないか」と思うでしょう。

しかし，いざ本にまとめるとなると口頭や板書で説明しているようなこともきちんと書く必要があります。p.20 のパラパラ漫画も iPad などで見やすいように作り直しました。

さらに私は本業が忙しくて，なかなかこちらの作業に時間が取れません。うーむ。

と言うわけで取りあえずここまでの部分で「version 0.7」として本を出すことにしました。今後内容を追加する度に version 番号を上げていき，完成したら version1.0 とするつもりです。

ですからときどき amazon のページで version 番号を確認していただき，お手持ちのものより上がっていましたら amazon のカスターサービスにお問い合わせいただくと最新版をダウンロードできます。(もちろんその際追加料金は不要です。)

と言うわけで，version1.0 が出るまで少々お待ち下さいませ。