1.1　包除原理は整式の展開なのだ

1.1.1　はじめに

和集合 (例えば $A \cup B$) の要素の個数を求めるためには，包除原理を使うことが多い。

包除原理

$n(A \cup B)$ を求めるには

$$\begin{aligned} n(A \cup B) = & n(A) + n(B) && \blacktriangleleft \text{集合 1 つずつの要素の個数を}\textbf{足す} \\ & -n(A \cap B) && \blacktriangleleft \text{集合 2 つの共通部分の要素の個数を}\textbf{引く} \end{aligned}$$

$n(A \cup B \cup C)$ を求めるには

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = & n(A) + n(B) + n(C) && \blacktriangleleft \text{集合 1 つずつの要素の個数を}\textbf{足す} \\ & -n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) && \blacktriangleleft \text{集合 2 つずつの共通部分の要素の個数を}\textbf{引く} \\ & +n(A \cap B \cap C) && \blacktriangleleft \text{集合 3 つ (ずつ) の共通部分の要素の個数を}\textbf{足す} \end{aligned}$$

この二つの公式に共通する「法則」が感じられるだろうか？ 実は，**この公式の背景には「整式の展開」**があるのだ。

このプリントでは，このことを説明し，さらに，包除原理を $n(A \cup B \cup C \cup D)$ に拡張することを目標にする。

1.1.2　真偽値

命題 P に対して，その**真偽値** (truth value) $T(P)$ を次のように定める。

$$T(P) = \begin{cases} 1 & (P \text{ が真のとき}), \\ 0 & (P \text{ が偽のとき}) \end{cases}$$

(例) $T(2\text{ は偶数}) = 1$，$T(2\text{ は奇数}) = 0$，$T(-1 \leqq \sin\theta \leqq 1) = 1$

次の公式が成り立つ。($\overline{P}$ は，P の否定を表す。)

真偽値の公式

(1) $T(\overline{P}) = 1 - T(P) \quad \cdots ①$　　(2) $T(P \text{ かつ } Q) = T(P)T(Q) \quad \cdots ②$

(証明)

$$T(\overline{P}) = 1 \iff \overline{P}\text{が真} \iff P\text{ が偽} \iff T(P) = 0$$

$$T(\overline{P}) = 0 \iff \overline{P}\text{が偽} \iff P\text{ が真} \iff T(P) = 1$$

よって，(1) が成り立つ。

$$T(P \text{ かつ } Q) = 1 \iff \text{「}P \text{ かつ } Q\text{」が真} \iff \text{「}P\text{ が真」かつ「}Q\text{ が真」}$$

$$\begin{aligned}
&\iff T(P)=T(Q)=1 \iff T(P)T(Q)=1 \\
T(P\text{ かつ }Q)=0 &\iff \text{「}P\text{ かつ }Q\text{」が偽} \iff \text{「}P\text{ が偽」または「}Q\text{ が偽」} \\
&\iff T(P)=0\text{ または }T(Q)=0 \iff T(P)T(Q)=0
\end{aligned}$$

よって，(2) が成り立つ。 ■

(注) 「$T(P\text{ または }Q)=\max\{T(P),T(Q)\}$」も成り立つが，使い勝手が良くないので，このプリントでは使わない。

1.1.3 真偽値と $n(A)$

以下では，全体集合 U は**有限集合** (要素の個数が有限) とする。したがって，集合 (U の部分集合) はすべて有限集合である。

x が U の要素全体を動くときの，関数 $f(x)$ の総和を $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{x\in U} f(x)}$ と表す。

(例) $U=\{1,2,3\}$ のとき

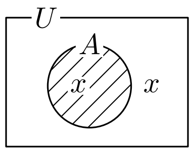
$$\sum_{x\in U} x^2 = 1^2+2^2+3^2=14$$

$x\in A$ のときは $T(x\in A)=1$ となり，$x\notin A$ のときは $T(x\in A)=0$ となるので，つぎの公式は明らかである。

真偽値と $n(A)$

A の要素の個数 $n(A)$ は

$$n(A)=\sum_{x\in U} T(x\in A) \qquad \cdots\cdots ③$$



(例) $U=\{1,2,3\}$，$A=\{1,2\}$ のとき

$$\sum_{x\in U} T(x\in A) = T(1\in A)+T(2\in A)+T(3\in A)=1+1+0=2=n(A)$$

また，A と B の共通部分 $A\cap B$ の要素の個数については

$$\begin{aligned}
n(A\cap B) &= \sum_{x\in U} T(x\in A\cap B) \\
&= \sum_{x\in U} T(x\in A\text{ かつ }x\in B) \\
&= \sum_{x\in U} T(x\in A)T(x\in B) \qquad (\because ②) \qquad \cdots\cdots ④
\end{aligned}$$

1.1.4 包除原理の証明への真偽値の応用

A，B などはすべて全体集合 U の部分集合とする。公式③を用いて，包除原理を証明してみよう。まず公式① と② が使えるように，命題 $x \in A \cup B$ を同値変形しておこう。

$$x \in A \cup B \iff \text{「}x \in A \text{ または } x \in B\text{」} \iff \overline{\overline{x \in A \text{ または } x \in B}} \iff \overline{x \notin A \text{ かつ } x \notin B}$$

したがって，①，② を用いると

$$\begin{aligned} T(x \in A \cup B) &= T(\overline{x \notin A \text{ かつ } x \notin B}) \\ &= 1 - T(x \notin A \text{ かつ } x \notin B) && \blacktriangleleft \text{ ①を用いた} \\ &= 1 - T(x \notin A)T(x \notin B) && \blacktriangleleft \text{ ②を用いた} \\ &= 1 - \{1 - T(x \in A)\}\{1 - T(x \in B)\} && \blacktriangleleft \text{ 再び①} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{T_A = T(x \in A)}$，$\boldsymbol{T_B = T(x \in B)}$ と表すと

$$\begin{aligned} T(x \in A \cup B) &= 1 - (1 - T_A)(1 - T_B) && \cdots\cdots ⑤ \\ &= \underbrace{T_A + T_B - T_A T_B}_{\text{包除原理みたいだぜ}} && \cdots\cdots ⑥ \end{aligned}$$

これと③，④を用いて包除原理を証明しよう。

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ の証明は次の通り。

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= \sum_{x \in U} T(x \in A \cup B) && \blacktriangleleft \text{ ③を用いた} \\ &= \sum_{x \in U} (T_A + T_B - T_A T_B) && \blacktriangleleft \text{ ⑥を用いた} \\ &= \sum_{x \in U} T_A + \sum_{x \in U} T_B - \sum_{x \in U} T_A T_B \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) && \blacktriangleleft \text{ ④より，} \sum_{x \in U} T_A T_B = n(A \cap B) \end{aligned}$$

この証明で分かるように，包除原理の形は「**⑤を展開した⑥**」に由来するのである。

(2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ の証明は次の通り。

まず，$T_C = T(x \in C)$ と表せば，⑤と同様に

$$T(x \in A \cup B \cup C) = 1 - (1 - T_A)(1 - T_B)(1 - T_C)$$

よって

$$T(x \in A \cup B \cup C) = \underbrace{T_A + T_B + T_C - T_A T_B - T_B T_C - T_C T_A + T_A T_B T_C}_{\text{包除原理みたいだぜ}} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

これを用いると

$$
\begin{aligned}
& n(A \cup B \cup C) \\
&= \sum_{x \in U} T(x \in A \cup B \cup C) \\
&= \sum_{x \in U} (T_A + T_B + T_C - T_A T_B - T_B T_C - T_C T_A + T_A T_B T_C) \\
&= \sum_{x \in U} T_A + \sum_{x \in U} T_B + \sum_{x \in U} T_C \\
&\quad - \sum_{x \in U} T_A T_B - \sum_{x \in U} T_B T_C - \sum_{x \in U} T_C T_A \\
&\quad + \sum_{x \in U} T_A T_B T_C \\
&= n(A) + n(B) + n(C) \\
&\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\
&\quad + n(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

◀ ③を用いた

◀ ⑦を用いた

◀ ④と同様に，

$\sum_{x \in U} T_A T_B T_C = n(A \cap B \cap C)$

この証明からわかるように，包除原理の形は $1 - (1 - T_A)(1 - T_B)(1 - T_C)$ を**展開**した⑦に由来するのである。

1.1.5 包除原理の拡張

4 つの集合 A，B，C，D の和集合 $A \cup B \cup C \cup D$ の要素の個数を求めるために，包除原理を拡張しよう。

$T_D = T(x \in D)$ と表せば，⑤と同様に

$$
T(x \in A \cup B \cup C \cup D) = 1 - (1 - T_A)(1 - T_B)(1 - T_C)(1 - T_D)
$$

右辺を展開し

$$
\begin{aligned}
T(x \in A \cup B \cup C \cup D) = & T_A + T_B + T_C + T_D \\
& - T_A T_B - T_A T_C - T_A T_D - T_B T_C - T_B T_D - T_C T_D \\
& + T_A T_B T_C + T_A T_B T_D + T_A T_C T_D + T_B T_C T_D \\
& - T_A T_B T_C T_D
\end{aligned}
$$

両辺の $\sum_{x \in U}$ を取ることにより

$$
\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C \cup D)\\
=&n(A)+n(B)+n(C)+n(D)\\
&\quad -n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(A \cap D)\\
&\quad -n(B \cap C)-n(B \cap D)-n(C \cap D)\\
&\quad +n(A \cap B \cap C)+n(A \cap B \cap D)\\
&\quad +n(A \cap C \cap D)+n(B \cap C \cap D)\\
&\quad -n(A \cap B \cap C \cap D)
\end{aligned}
$$

◀ 集合 1 つずつの要素の個数を**足す**

◀ 集合 2 つずつの共通部分の要素の個数を**引く**

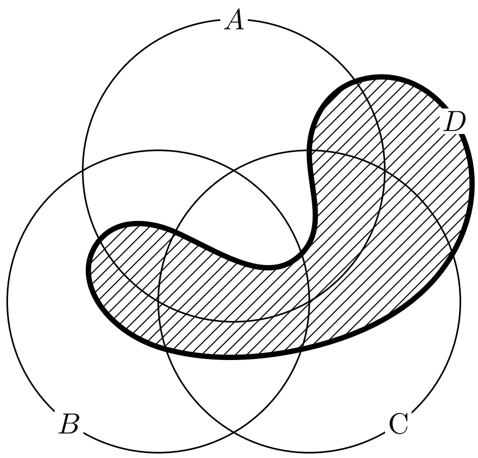
◀ 集合 3 つずつの共通部分の要素の個数を**足す**

◀ 集合 4 つの共通部分の要素の個数を**引く**

同様に，集合がいくつになっても包除原理を作ることができる。 ■

1.2 集合 4 つのベン図

4 つの集合 A、B、C、D のベン図は次のようになる.



(文責．長谷川進)