

## §1. 三項間漸化式

### 1.1 三項間漸化式の解法

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (p, q \text{ は定数})$$

のように、 $\{a_n\}$  の隣接三項間の一次式 (定数項は 0) で表される漸化式を「三項間線形斉次 (せいじ) 型漸化式」という。

- 「線形」… 一次式
- 「斉次」… 定数項が 0

とすることだ。

普通は簡単に「三項間漸化式」という。

ここから一般項を求めるのは、次のようにするのが一番早くて楽勝。

#### 三項間漸化式の解法

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (p, q \text{ は定数}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

に対し、2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0$$

を、 $\textcircled{1}$  の**特性方程式**と呼ぶ。

特性方程式の解を  $\alpha, \beta$  とするとき、 $\textcircled{1}$  を満たす数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$  は次のように表される。

(i)  $\alpha \neq \beta$  のとき

$$a_n = u\alpha^{n-1} + v\beta^{n-1} \quad (u, v \text{ は定数})$$

(ii)  $\alpha = \beta$  のとき、つまり特性方程式が重解をもつとき

$$a_n = u\alpha^{n-1} + vn\alpha^{n-1} \quad (u, v \text{ は定数})$$

理屈は後で解説するが、まずは使ってみよう。

**例題.** 次の  $\{a_n\}$  の一般項をそれぞれ求めよ。

(1)  $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+2} - a_{n+1} - 12a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(2)  $a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(3)  $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(解答は次ページ)

**解答**

(1) 特性方程式は

$$\begin{aligned}x^2 - x - 12 &= 0 \\(x - 4)(x + 3) &= 0 \\x &= 4, -3\end{aligned}$$

特性方程式が異なる解をもつ場合であるから

$$a_n = \underbrace{u4^{n-1}}_{\text{公比が}4} + \underbrace{v(-3)^{n-1}}_{\text{公比が}-3}$$

と表される。(u, v は定数)

$$a_1 = u + v = 2, a_2 = 4u - 3v = 1$$

となり

$$u = v = 1$$

よって

$$\underline{a_n = 4^{n-1} + (-3)^{n-1}} \quad (\text{答})$$

(2) 特性方程式は

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &= 0 \\(x - 2)(x - 3) &= 0 \\x &= 2, 3\end{aligned}$$

特性方程式が異なる解をもつ場合であるから

$$a_n = \underbrace{u3^{n-1}}_{\text{公比が}3} + \underbrace{v2^{n-1}}_{\text{公比が}2}$$

と表される。(u, v は定数)

$$a_1 = u + v = 2, a_2 = 3u + 2v = 5$$

となり

$$u = v = 1$$

よって

$$\underline{a_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}} \quad (\text{答})$$

(3) 特性方程式は

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x - 2)^2 &= 0 \\x &= 2 \quad (\text{重解})\end{aligned}$$

特性方程式が2を重解をもつ場合であるから

$$a_n = \underbrace{u2^{n-1}}_{\text{公比が2}} + \underbrace{vn2^{n-1}}_{n \text{ 倍を付ける}}$$

と表される。(u, v は定数)

$$a_1 = u + v = 0, a_2 = 2u + 4v = 2$$

となり

$$u = -1, v = 1$$

よって

$$\underline{a_n = -2^{n-1} + n2^{n-1} = (n-1)2^{n-1}} \quad (\text{答})$$

## 1.2 何故、こんな解き方ができるのか

### 1.2.1 同じ3項間漸化式を満たす数列の性質

大学の数学では「求めたいものと似た性質を持つものから、求めたいものに迫る」という考え方が現れる。三項間漸化式はまさにその例だ。(だから難しいのだよ。)

$\{b_n\}$  が①とまったく同じ形の漸化式を満たすとき、すなわち

$$b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n = 0 \quad (p, q \text{ は定数})$$

を満たすとき、「 $\{b_n\}$  は①を満たす」と言う。(  $\{a_n\}$  に似たものだ。)

①を  $\{b_n\}$  と  $\{c_n\}$  が満たすとして、

つまり、

$$b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n = 0, \quad c_{n+2} + pc_{n+1} + qc_n = 0$$

が成り立っている、ということ。

このとき、次の性質が成り立つことは容易にわかる。

**性質 1.** 定数  $u$  に対し、 $\{ub_n\}$  も①を満たす。

**性質 2.**  $\{b_n + c_n\}$  も①を満たす。

**性質 3.** 定数  $u, v$  に対し、 $\{ub_n + vc_n\}$  も①を満たす。

さらに  $\{d_n\}$  を  $d_n = ub_n + vc_n$  により定めれば、①を満たしており、

**性質 4.**  $a_1 = d_1$  かつ  $a_2 = d_2$  が成り立つならば、 $a_n = d_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

が成り立つこともわかる。(数学的帰納法により明らかだ。)

### 1.2.2 ① を満たす等比数列を求めよう

等比数列  $\{r^{n-1}\}$  が①を満たすように  $r (\neq 0)$  を定めよう.

$$r^{n+1} + pr^n + qr^{n-1} = 0$$

を満たすのだから、両辺を  $r^{n-1}$  で割って

$$r^2 + pr + q = 0$$

これが①の特性方程式である。(これが特性方程式の本来の意味だ.)

(i) 特性方程式が異なる解  $\alpha, \beta$  をもつとき.

$\{\alpha^{n-1}\}$  と  $\{\beta^{n-1}\}$  が①を満たすので  $\{u\alpha^{n-1} + v\beta^{n-1}\}$  ( $u, v$  は定数) が①を満たす. この数列の初項は  $u + v$  で、第2項は  $u\alpha + v\beta$  であるが、

$$a_1 = u + v, \quad a_2 = u\alpha + v\beta$$

となるように  $u, v$  を定めることができる ( $\because \alpha \neq \beta$ ) から、**性質4**により、

$$a_n = u\alpha^{n-1} + v\beta^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる.

(ii) 特性方程式が重解  $\alpha$  をもつとき. (注. 以下では数学IIの**微分法**を用いています. 習ってから読みましょう.)

$\{\alpha^{n-1}\}$  が①を満たすのは分かるが、①を満たす数列をもう一つ見つけなければいけない.

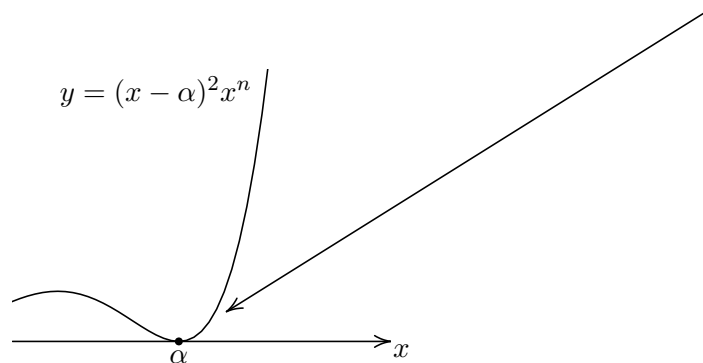
そこで

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)^2$$

となること ( $\because \alpha$  が重解) を利用しよう. 両辺  $\times x^n$  として

$$x^{n+2} + px^{n+1} + qx^n = (x - \alpha)^2 x^n$$

右辺のグラフは、 $x = \alpha$  の点で  $x$  軸と接する ( $\because \alpha$  が重解!) ので、 $x = \alpha$  での微分係数は0である.



したがって、

$$(\text{左辺の導関数}) = (n+2)x^{n+1} + p(n+1)x^n + qnx^{n-1}$$

に  $x = \alpha$  を代入すると 0 になるのだから

$$(n+2)\alpha^{n+1} + p(n+1)\alpha^n + qn\alpha^{n-1} = 0$$

よって、 $\{n\alpha^{n-1}\}$  が①を満たすことが分かった！

したがって、 $\{u\alpha^{n-1} + v\alpha^{n-1}\}$  ( $u, v$  は定数) が①を満たす。この数列の初項は  $u+v$  で、第 2 項は  $u\alpha + 2v\alpha$  であるが、

$$a_1 = u + v, \quad a_2 = u\alpha + 2v\alpha$$

となるように  $u, v$  を定めることができる ( $\because \alpha \neq 0$ ) から、**性質 4** により、

$$a_n = u\alpha^{n-1} + v\alpha^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。■