§1.　三項間漸化式

1.1　三項間漸化式の解法

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \qquad (p,\, q \text{ は定数})$$

のように、$\{a_n\}$ の隣接三項間の一次式 (定数項は 0) で表される漸化式を「三項間線形斉次 (せいじ) 型漸化式」という。

- 「線形」… 一次式
- 「斉次」… 定数項が 0

と言うことだ。
　普通は簡単に「三項間漸化式」という.
　ここから一般項を求めるのは、次のようにするのが一番早くて楽勝.

三項間漸化式の解法

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \qquad (p,\, q \text{ は定数}) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

に対し，2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0$$

を，①の**特性方程式**と呼ぶ.
　特性方程式の解を α，β とするとき，①を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は次のように表される.

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき

$$a_n = u\alpha^{n-1} + v\beta^{n-1} \qquad (u, v \text{ は定数})$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき，つまり特性方程式が重解をもつとき

$$a_n = u\alpha^{n-1} + vn\alpha^{n-1} \qquad (u, v \text{ は定数})$$

　理屈は後で解説するが，まずは使ってみよう。
例題.　次の $\{a_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(1) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 12a_n = 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(3) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(解答は次ページ)

解答

(1) 特性方程式は

$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$
$$x = 4, -3$$

特性方程式が異なる解をもつ場合であるから

$$a_n = \underbrace{u4^{n-1}}_{\text{公比が }4} + \underbrace{v(-3)^{n-1}}_{\text{公比が}-3}$$

と表される。(u, v は定数)

$$a_1 = u + v = 2, a_2 = 4u - 3v = 1$$

となり

$$u = v = 1$$

よって

$$\underline{a_n = 4^{n-1} + (-3)^{n-1}} \quad (\text{答})$$

(2) 特性方程式は

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$
$$x = 2, 3$$

特性方程式が異なる解をもつ場合であるから

$$a_n = \underbrace{u3^{n-1}}_{\text{公比が }3} + \underbrace{v2^{n-1}}_{\text{公比が }2}$$

と表される。(u, v は定数)

$$a_1 = u + v = 2, a_2 = 3u + 2v = 5$$

となり

$$u = v = 1$$

よって

$$\underline{a_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}} \quad (\text{答})$$

(3) 特性方程式は

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$x = 2 \quad (\text{重解})$$

特性方程式が 2 を重解をもつ場合であるから

$$a_n = \underbrace{u2^{n-1}}_{\text{公比が 2}} + \underbrace{vn2^{n-1}}_{n\text{ 倍を付ける}}$$

と表される。(u, v は定数)

$$a_1 = u + v = 0, a_2 = 2u + 4v = 2$$

となり

$$u = -1, v = 1$$

よって

$$\underline{a_n = -2^{n-1} + n2^{n-1} = (n-1)2^{n-1}} \quad (答)$$

1.2　何故，こんな解き方ができるのか

1.2.1　同じ 3 項間漸化式を満たす数列の性質

大学の数学では「求めたいものと似た性質を持つものから，求めたいものに迫る」という考え方が現れる。三項間漸化式はまさにその例だ。(だから難しいのだよ。)

$\{b_n\}$ が①とまったく同じ形の漸化式を満たすとき，すなわち

$$b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n = 0 \qquad (p, q \text{ は定数})$$

を満たすとき,「$\{b_n\}$ は①を満たす」と言う.（$\{a_n\}$ に似たものだ。）

①を $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ が満たすとしよう.

つまり、

$$b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n = 0, \quad c_{n+2} + pc_{n+1} + qc_n = 0$$

が成り立っている、ということ.

このとき，次の性質が成り立つことは容易にわかる.

性質 1．定数 u に対し，$\{ub_n\}$ も①を満たす.

性質 2．$\{b_n + c_n\}$ も①を満たす.

性質 3．定数 u，v に対し，$\{ub_n + vc_n\}$ も①を満たす.

さらに $\{d_n\}$ を $d_n = ub_n + vc_n$ により定めれば，①を満たしており,

性質 4.　$a_1 = d_1$ かつ $a_2 = d_2$ が成り立つならば，$a_n = d_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

が成り立つこともわかる.（数学的帰納法により明らかだ.）

1.2.2 ① を満たす等比数列を求めよう

等比数列 $\left\{r^{n-1}\right\}$ が①を満たすように r $(\neq 0)$ を定めよう．

$$r^{n+1}+pr^n+qr^{n-1}=0$$

を満たすのだから，両辺を r^{n-1} で割って

$$r^2+pr+q=0$$

これが①の特性方程式 である．(これが特性方程式の本来の意味だ．)

(i) 特性方程式が異なる解 α、β をもつとき．

$\left\{\alpha^{n-1}\right\}$ と $\left\{\beta^{n-1}\right\}$ が①を満たすので $\left\{u\alpha^{n-1}+v\beta^{n-1}\right\}$($u$、$v$ は定数) が①を満たす．この数列の初項は $u+v$ で、第 2 項は $u\alpha+v\beta$ であるが、

$$a_1=u+v,\quad a_2=u\alpha+v\beta$$

となるように u、v を定めることができる（$\because\ \alpha\neq\beta$）から、**性質** 4 により、

$$a_n=u\alpha^{n-1}+v\beta^{n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

となる．

(ii) 特性方程式が重解 α をもつとき．(注．以下では数学 II の**微分法**を用いています．習ってから読みましょう．)

$\left\{\alpha^{n-1}\right\}$ が①を満たすのは分かるが、①を満たす数列をもう一つ見つけなければいけない．

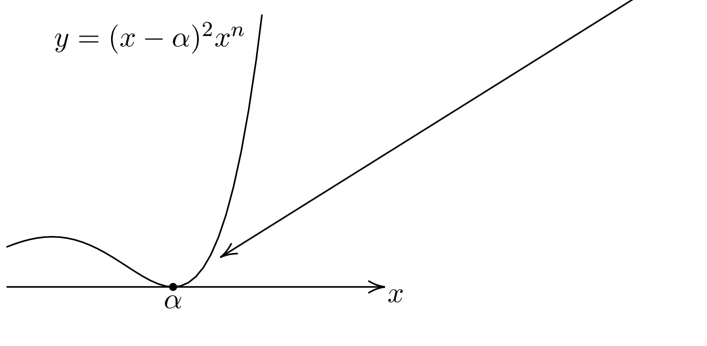
そこで

$$x^2+px+q=(x-\alpha)^2$$

となること（$\because\ \alpha$ が重解）を利用しよう．両辺× x^n として

$$x^{n+2}+px^{n+1}+qx^n=(x-\alpha)^2x^n$$

右辺のグラフは、$x=\alpha$ の点で x 軸と接する（$\because\ \alpha$ が重解！）ので、$x=\alpha$ での微分係数は 0 である．



したがって、

$$(\text{左辺の導関数}) = (n+2)x^{n+1} + p(n+1)x^n + qnx^{n-1}$$

に $x = \alpha$ を代入すると 0 になるのだから

$$(n+2)\alpha^{n+1} + p(n+1)\alpha^n + qn\alpha^{n-1} = 0$$

よって、$\{n\alpha^{n-1}\}$ が①を満たす ことが分かった！

したがって、$\{u\alpha^{n-1} + vn\alpha^{n-1}\}$($u$、$v$ は定数) が①を満たす．この数列の初項は $u+v$ で、第 2 項は $u\alpha + 2v\alpha$ であるが、

$$a_1 = u + v, \quad a_2 = u\alpha + 2v\alpha$$

となるように u、v を定めることができる（$\because \alpha \neq 0$）から、**性質** 4 により、

$$a_n = u\alpha^{n-1} + vn\alpha^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．■

(文責．長谷川進)